

1

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
И АНАЛИЗ ДАННЫХ**

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**MODELLING
AND DATA ANALYSIS**

SCIENTIFIC JOURNAL

2021

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (ONLINE)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

2021 • Том. 11 • № 1

MODELLING AND DATA ANALYSIS

SCIENTIFIC JOURNAL

2021 • Vol. 11 • № 1



Московский государственный
психолого-педагогический университет
Moscow State University
of Psychology & Education

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор – Л.С. Куравский

Заместители главного редактора – С.Д. Кулик, А.В. Пантелеев

Члены редакционной коллегии – К.К. Абгарян, Г.Г. Амосов, М.В. Воронов, Е.Л. Григоренко (США), В.К. Захаров, А.И. Кибзун, Л.М. Либкин (Великобритания), В.Р. Милов, А.В. Наумов, Д.Л. Ревизников, Х. Холлинг (Германия), Д. Фрэнсис (США), К.В. Хорошенко (Великобритания), Г.А. Юрьев

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Председатель редакционного совета – Г.Г. Амосов

Члены редакционного совета – В.А. Барабанщиков, П. Бентлер (США), А.В. Горбатов, Л.С. Куравский, Л.М. Либкин (Великобритания), А.А. Марголис, В.В. Рубцов, Д.В. Ушаков, Д. Фрэнсис (США)

Ответственный секретарь – Н.Е. Юрьева

Издаётся с 2011 года

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:

г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий
Тел.: +7 (499) 167-66-74
E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.

Свидетельство о регистрации средств массовой информации

ПИ № ФС77-52058 от 7 декабря 2012 года

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (online)

© ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», 2021.
Все права защищены. Любая часть этого издания не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения редакционной коллегии. Правила оформления рукописей, направляемых в редакцию журнала, высылаются по запросу по электронной почте.

◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 681.5

Синтез H_∞ регуляторов на конечном промежутке времени

Пантелеев А.В. *

Московский авиационный институт (НИУ МАИ),

г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>

e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Яковлева А.А. **

Московский авиационный институт (НИУ МАИ),

г. Москва, Российская Федерация

e-mail: ayakovleva982@gmail.com

В статье рассматривается проблема нахождения H_∞ – регуляторов в задаче управления по выходу. Сформулированы и доказаны достаточные условия, при которых может быть синтезировано H_∞ – управление на конечном промежутке времени функционирования динамической системы. Предложены два приближенных подхода к формированию и исследованию качества замкнутых систем в условиях неполной информации о векторе состояния.

Ключевые слова: линейный регулятор, H_∞ – управление, управление с обратной связью, стабилизация самолета, алгоритмическое обеспечение, программное обеспечение, конечное время функционирования.

Для цитаты:

Пантелеев А.В., Яковлева А.А. Синтез H_∞ регуляторов на конечном промежутке времени // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 1. С. 5–19 . DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110101>

***Пантелеев Андрей Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» института «Информационные технологии и прикладная математика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ (НИУ)), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

****Яковлева Александра Алексеевна**, студент магистратуры, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ (НИУ)), г. Москва, Российская Федерация, e-mail: ayakovleva982@gmail.com



1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи и методы нахождения H_∞ – управления стали уже классическими [1–8]. Однако решение проблемы синтеза регуляторов в условиях неполной информации о состоянии до сих пор вызывает трудности. В статье при помощи методики, описанной в [1, 3, 5–7], сформулированы и доказаны достаточные условия H_∞ – управления, качество которого зависит от поведения вектора выхода модели измерительной системы. Найдены законы управления моделью объекта и внешним воздействием с обратной связью по полному вектору состояния. Поскольку он в общем случае является информацией обо всех координатах вектора состояния является недоступной, предлагаются два приближенных подхода. Первый связан с нахождением псевдорешения линейной модели измерительной системы и его использованием в управлении, второй – с синтезом наблюдателя состояния, вырабатывающего оценку вектора состояния, и использованием оценки в управлении. Приведен пример решения задачи стабилизации самолета, иллюстрирующий эффективность предложенных подходов.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Заданы математическая модель объекта управления

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t), \quad x(0) = 0, \quad (1)$$

и модель измерительной системы

$$y(t) = C(t)x(t), \quad (2)$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния, $u \in R^q$ – вектор управления, $w \in R^p$ – вектор возмущений, $y \in R^m$ – вектор выхода (вектор измерений), $t \in T = [0, t_1]$ – время, t_1 – заданное положительное число. Заданы непрерывные матрицы $A(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$, $C(t)$ размеров $(n \times n)$, $(n \times p)$, $(n \times q)$, $(m \times n)$ соответственно.

Предполагается, что

- $w(\cdot) \in L_2 [0, \infty)$, $u(\cdot) \in L_2 [0, \infty)$,
- $m \leq n$, $\text{rg } C(t) = m \quad \forall t \in T$;
- система полностью управляемая и наблюдаемая:
 $\text{rg}(B \ AB_2 \ \dots \ A^{n-1}B_2) = n$, $\text{rg}(C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T) = n$.

Обозначим $\|z(t)\|^2 = y(t)^T S(t)y(t) + u^T(t)Q(t)u(t)$ – характеристику текущего поведения системы, где $Q(t)$ – положительно определенная симметрическая матрица, $S(t)$ – неотрицательно определенная симметрическая матрица; а также $\|F(t_1)\|^2 = x(t_1)^T \Lambda x(t_1)$ – характеристику конечного состояния системы, где Λ – симметрическая неотрицательно определенная матрица размеров $(n \times n)$.

Требуется обеспечить (если это возможно) выполнение неравенства



$$\frac{\int_0^{t_1} \|z(t)\|^2 dt + \|F(t_1)\|^2}{\int_0^{t_1} \|w(t)\|^2 dt} = \frac{\int_0^{t_1} [y(t)^T S(t)y(t) + u^T(t)Q(t)u(t)] dt + x(t_1)^T \Lambda x(t_1)}{\int_0^{t_1} \|w(t)\|^2 dt} =$$

$$= \frac{\int_0^{t_1} [x^T(t) C(t)^T S(t) C(t) x(t) + u^T(t)Q(t)u(t)] dt + x(t_1)^T \Lambda x(t_1)}{\int_0^{t_1} w^T(t)w(t) dt} \leq \gamma^2, \tag{3}$$

где $\gamma > 0$ – заданное неотрицательное число, при одновременном обеспечении устойчивости замкнутой системы. При этом желательно найти минимальное значение γ^* , при котором указанные свойства еще справедливы, чего можно добиться, минимизируя значение числителя дроби при одновременной максимизации знаменателя.

Иными словами, функционал качества должен удовлетворять условию

$$I(u, w) = \int_0^{t_1} [\|z(t)\|^2 - \gamma^2 w^T(t)w(t)] dt + \|F(t_1)\|^2 =$$

$$= \int_0^{t_1} [x^T(t) C^T S C x(t) + u^T(t)Q u(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)] dt + x(t_1)^T \Lambda x(t_1) \leq 0,$$

которое будет выполняться при минимизации затрат на управление при наилучшем влиянии возмущений.

3. СИНТЕЗ H_∞ – РЕГУЛЯТОРОВ

Пусть имеется функция $V(t, x) \in C^{1,1}$. Составим конструкции

$$R(t, x, u, w) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T [A(t)x + B_1(t)w + B_2(t)u] +$$

$$+ x^T C(t)^T S(t) C(t) x + u^T Q(t) u - \gamma^2 w^T w,$$

$$G(t_1, x) = V(t_1, x) - x^T \Lambda x, \tag{4}$$

где $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_n} \right)^T$.

Теорема. Если существует функция $V(t, x) \in C^{1,1}$, удовлетворяющая условию $V(t, 0) = 0$ и



$$R(t, x, u^*(x), w^*(x)) = \min_u \max_w R(x, u, w) = 0 \quad \forall x \in R^n, \forall t \in T, \quad (5)$$

$$G(t, x) = 0 \quad \forall x \in R^n,$$

где

$$u^*(t, x) = -\frac{1}{2} Q^{-1}(t) B_2^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) x,$$

$$w^*(t, x) = \frac{1}{2\gamma^2} B_1^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{\gamma^2} B_1^T(t) K_2(t) x, \quad (6)$$

а матрица $K_2(t) \geq 0$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$\dot{K}_2 + K_2 A + A^T K_2 - K_2 \left[B_2 Q^{-1} B_2^T - \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T \right] K_2 + C^T S C = 0, K_2(t_1) = \Lambda, \quad (7)$$

то неравенство (3) справедливо.

Доказательство. Пусть выполняются условия утверждения. Найдем $\min_u \max_w R(t, x, u, w)$ с помощью необходимых условий экстремума:

$$\frac{\partial R(t, x, u, w)}{\partial u} = B_2^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} - 2Q(t)u = 0,$$

$$\text{отсюда } u^*(t, x) = -\frac{1}{2} Q^{-1}(t) B_2^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial R(t, x, u, w)}{\partial w} = B_1^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} - 2\gamma^2 w = 0,$$

$$\text{отсюда } w^*(t, x) = \frac{1}{2\gamma^2} B_1^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}.$$

Здесь $u^*(t, x), w^*(t, x)$ – структуры управления объектом и возмущением (внешним воздействием).

Достаточные условия безусловного минимума по u выполняются, поскольку

ку $\frac{\partial^2 R(t, x, u, w)}{\partial u^T \partial u} = 2Q(t) > 0$ и максимума по w также выполняются, так как

$$\frac{\partial^2 R(t, x, u, w)}{\partial w^T \partial w} = -2\gamma^2 < 0.$$

Тогда

$$R(t, x, u, w) = R(t, x, u^*(t, x), w^*(t, x)) - \gamma^2 [w - w^*(t, x)]^T [w - w^*(t, x)] +$$

$$+ [u - u^*(t, x)]^T Q [u - u^*(t, x)].$$

Отсюда

$$R(t, x, u^*(t, x), w(t, x)) \leq R(t, x, u^*(t, x), w^*(t, x)) \leq R(t, x, u(t, x), w^*(t, x)), \quad (8)$$



т.е. имеется седловая точка.

Пусть имеющаяся функция $V(t, x) \in C^{1,1}$ удовлетворяет условию $V(0, 0) = 0$ и $R(x, u^*(t, x), w^*(t, x)) = 0$.

Так как система полностью управляемая и наблюдаемая, то для любых $u(\cdot) \in L_2[0, \infty)$, $w(\cdot) \in L_2[0, \infty)$ то имеем $y(\cdot) \in L_2[0, \infty)$.

Вдоль траекторий динамической системы справедливо

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \right)^T [A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t)] + \|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2 = \\ = \frac{dV(t, x(t))}{dt} + \|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2 = \underbrace{R(t, x, u^*(t, x(t)), w^*(t, x(t)))}_0 - \\ - \gamma^2 [w(t) - w^*(t, x(t))]^T [w(t) - w^*(t, x(t))] + [u(t) - u^*(t, x)]^T Q(t) [u - u^*(t, x(t))]. \end{aligned}$$

Рассмотрим левую часть неравенства (8), а именно

$$R(t, x, u^*(t, x), w(t, x)) \leq \underbrace{R(t, x, u^*(t, x(t)), w^*(t, x(t)))}_0, \text{ т.е. при } u = u^*(x):$$

$$\frac{dV(t, x(t))}{dt} + \|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2 \leq 0.$$

Проинтегрируем левую и правую части по времени от 0 до t_1 :

$$V(t_1, x(t_1)) - V(0, x(0)) + \int_0^{t_1} \|z(t)\|^2 dt - \gamma^2 \int_0^{t_1} \|w(t)\|^2 dt \leq 0.$$

Так как $G(t_1, x) = V(t_1, x) - x^T \Lambda x = 0$, то $V(t_1, x(t_1)) = x(t_1)^T \Lambda x(t_1)$. Так как $x(0) = 0$, то $V(0, x(0)) = V(0, 0) = 0$. Отсюда следует, что

$$\int_0^{t_1} \|z(t)\|^2 dt + x(t_1)^T \Lambda x(t_1) \leq \gamma^2 \int_0^{t_1} \|w(t)\|^2 dt.$$

Поэтому условие (3) справедливо.

Пусть $V(t, x) = x^T K_2(t) x$, где $K_2(t)$ – симметрическая положительно определенная матрица. Тогда $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = 2K_2(t) x$ и

$$u^*(t, x) = -\frac{1}{2} Q^{-1}(t) B_2^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) x,$$

$$w^*(t, x) = \frac{1}{2\gamma^2} B_1^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{\gamma^2} B_1^T(t) K_2(t) x.$$

Запишем условие $R(t, x, u^*(t, x), w^*(t, x)) = 0$ (для сокращения записи опустим аргумент t):



$$\begin{aligned} \dot{K}_2 + 2x^T K_2 A x + 2x^T K_2 B_1 \frac{1}{2\gamma^2} B_1^T 2K_2 x - 2x^T K_2 B_2 \frac{1}{2} Q^{-1} B_2^T 2K_2 x + x^T C^T S C x + \\ + x^T K_2 B_2 Q^{-1} B_2^T K_2 x - \frac{1}{\gamma^2} x^T K_2 B_1 B_1^T K_2 x = 0, \end{aligned}$$

или

$$x^T \left[\dot{K}_2 + 2K_2 A + \frac{1}{\gamma^2} K_2 B_1 B_1^T K_2 - K_2 B_2 Q^{-1} B_2^T K_2 + C^T S C \right] x = 0. \quad (9)$$

Условие $G(t_1, x) = V(t_1, x) - x^T \Lambda x = 0$ имеет вид

$$x^T [K_2(t_1) - \Lambda] x = 0. \quad (10)$$

Применяя в (9), (10) условие $[\cdot] + [\cdot]^T = 0$, получаем

$$\dot{K}_2 + K_2 A + A^T K_2 - K_2 \left[B_2 Q^{-1} B_2^T - \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T \right] K_2 + C^T S C = 0, \quad K_2(t_1) = \Lambda.$$

$$u^*(t, x) = -\frac{1}{2} Q^{-1}(t) B_2^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) x,$$

$$w^*(t, x) = \frac{1}{2\gamma^2} B_1^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{\gamma^2} B_1^T(t) K_2(t) x.$$

Доказательство закончено.

Замечание. Если энергия возмущений, действующих на систему, ограничена, то

$$\int_0^{t_1} \|w(t)\|^2 dt \leq 1, \text{ то } \int_0^{t_1} \|z(t)\|^2 dt + \underbrace{x(t_1)^T \Lambda x(t_1)}_{F(t_1)} \leq \gamma^2.$$

4. СИНТЕЗ H_∞ – РЕГУЛЯТОРОВ ПО ВЫХОДУ

Если $m = n$ и матрица $C(t)$ невырожденная $\forall t \in T$, то вектор состояния находится по вектору выхода непосредственно: $x = C^{-1}(t)y$. Тогда управление по выходу

$$u^*(t, y) = -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) C^{-1}(t) y.$$

Если $m \leq n$, $\text{rg } C(t) = m \quad \forall t \in T$, можно применить два подхода. Первый связан с нахождением псевдорешения \tilde{x} системы $y = C(t)x$ и его использованием в управлении, второй – с синтезом наблюдателя состояния, вырабатывающего оценку \hat{x} вектора состояния, и использованием оценки в управлении.

Первый подход. Найти псевдорешение системы $y = C(t)x$ при помощи псевдообратной матрицы $C^{-1}(t) = C^T(t)[C(t)C^T(t)]^{-1}$:

$$\tilde{x} = C^{-1}(t)y,$$



т.е. наименьший по модулю столбец \tilde{x} среди всех столбцов x , минимизирующих величину $|C(t)x - y|$, где модуль столбца $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Тогда управление по выходу имеет вид

$$u^*(t, y) = u^*(t, \tilde{x}) = -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) C^T(t) [C(t) C^T(t)]^{-1} y. \quad (9)$$

Второй подход. Синтезировать асимптотический наблюдатель полного порядка

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = x_0^*, \quad (10)$$

где $K(t)$ – матрица коэффициентов усиления наблюдателя размеров $(n \times m)$, x_0^* – столбец, содержащий априорную информацию о начальном состоянии. Матрица $K(t)$ подбирается из условий, обеспечивающих асимптотическое стремление погрешности $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ к нулю. Тогда управление имеет вид

$$u^*(t, y_0^*) = u^*(t, \hat{x}) = -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) \hat{x}, \quad (11)$$

где $y_0^* = \{y(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$ – накапливаемая информация о результатах измерения.

5. АЛГОРИТМ АНАЛИЗА КАЧЕСТВА H_∞ – РЕГУЛЯТОРОВ ПО ВЫХОДУ

1. Задать параметр $\gamma > 0$. Найти решение уравнения Риккати

$$\dot{K}_2 + K_2 A + A^T K_2 - K_2 \left[B_2 Q^{-1} B_2^T - \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T \right] K_2 + C^T S C = 0, \quad K_2(t_1) = \Lambda,$$

при фиксированном γ , удовлетворяющее условиям $K_2 \geq 0$.

Последовательно уменьшая γ , найти минимальное значение γ^* , при котором все условия остаются справедливыми.

2. Найти управление объектом вида (9) или (11) и закон изменения возмущающего воздействия $w^*(t, x) = \frac{1}{\gamma^2} B_1^T(t) K_2(t) x$.
3. Нахождение управления по выходу и моделирование уравнений замкнутой системы.

1 вариант (управление системой с произвольными возмущениями)

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t), \quad x(0) = 0, \quad y(t) = C(t)x(t),$$

первый подход:

$$u(t) = u^*(t, y(t)) = -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) C^T(t) [C(t) C^T(t)]^{-1} y(t);$$

второй подход:

$$u(t) = u^*(t, \hat{x}(t)) = -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) \hat{x}(t),$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = x_0^*;$$

при произвольных ограниченных возмущениях $w(t)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{t_1} \|w(t)\|^2 dt \leq 1.$$



2 вариант (управление системой с наилучшими возмущениями для каждой реализации)

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t), \quad x(0) = 0, \quad y(t) = C(t)x(t),$$

первый подход:

$$u(t) = u^*(t, y(t)) = -Q^{-1}(t)B_2^T(t)K_2(t)C^T(t)[C(t)C^T(t)]^{-1}y(t);$$

второй подход:

$$u(t) = u^*(t, \hat{x}(t)) = -Q^{-1}(t)B_2^T(t)K_2(t)\hat{x}(t),$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = x_0^*;$$

$$w(t) = w^*(t, x(t)) = \frac{1}{\gamma^2}B_1^T(t)K_2(t)x(t).$$

Пример

Рассмотрим в качестве примера задачу стабилизации самолёта F-16, $n = 5$, $q = 1$, $m = 1$, $r = 1$. Тогда математическая модель объекта описывается следующими матрицами, используемыми в уравнении (1):

$$A = \begin{pmatrix} -1,01887 & 0,90506 & -0,00215 & 0 & 0 \\ 0,82225 & -1,07741 & -0,17555 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20,2 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ -16,26 & -0,9788 & 0,4852 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20,2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица уравнения измерительной системы (2) имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 57,2958 & 0 \\ 0 & 57,2958 & 0 & 0 & 0 \\ -16,26 & -0,9788 & 0,4852 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор состояния $x = (x_1, \dots, x_5)^T$, где x_1 - угол атаки, x_2 - угловая скорость изменения угла тангажа, x_3 - угол поворота привода, x_4 - пропущенное через фильтр значение измеренного угла атаки, x_5 - ошибка обработки входного сигнала.

Матрицы Q и S в (3) подбираются таким образом, чтобы обеспечивать корректный расчет управления с обратной связью. Подобранные матрицы представлены в табл. 1.



Таблица 1

Параметры моделирования

Начальные условия $x(0)^T$	(0, 1; 1; 0, 05; 0, 1; 0, 01)
S	$\begin{pmatrix} 0,001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,018 & -0,0001349 & 0 \\ 0 & -0,0001349 & 0,997 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$
Q	0,0001
$T = [0; t_1]$	[0; 10]
Внешние возмущения	$w(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ или } t > t_w \\ 1, & 0 \leq t \leq t_w, \quad t_w = 1 \end{cases}$

Также важно выбрать минимальное значение параметра γ , которое удовлетворяет (3) и при этом гарантирует выполнение свойства асимптотической устойчивости замкнутой системы.

Результаты решения с разными значениями параметров представлены в табл. 2, где σ – спектр матрицы. Как видно из табл. 2, параметр $\gamma = 0.03$ является подходящим значением параметра γ . Для каждого рассмотренного случая выполняется условие $K_2 \geq 0$.

Таблица 2

Результаты при разных значениях параметра γ

γ	$\sigma(K_2)$	$\sigma(A + [\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 Q^{-1} B_2^T] K_2)$
0,1	$\begin{pmatrix} 0,0060 \\ 0,3276 \\ 21,8337 \\ 31,8139 \\ 148,5508 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -46,8213 \\ -1,2618 + 2,0651i \\ -1,2618 - 2,0651i \\ -9,6591 \\ -10,0023 \end{pmatrix}$
0,05	$\begin{pmatrix} 0,0062 \\ 0,3276 \\ 21,9850 \\ 32,2481 \\ 151,5567 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -45,3037 \\ -1,2613 + 2,0645i \\ -1,2613 - 2,0645i \\ -9,6064 \\ -10,0019 \end{pmatrix}$



γ	$\sigma(K_2)$	$\sigma(A + [\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 Q^{-1} B_2^T] K_2)$
0,04	$\begin{pmatrix} 0,0062 \\ 0,3276 \\ 22,1066 \\ 32,6181 \\ 154,1427 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -44,1324 \\ -1,2608 + 2,0639i \\ -1,2608 - 2,0639i \\ -9,5613 \\ -10,0017 \end{pmatrix}$
0,03	$\begin{pmatrix} 0,0065 \\ 0,3276 \\ 22,3977 \\ 33,5860 \\ 161,0255 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -41,4937 \\ -1,2594 + 2,0624i \\ -1,2594 - 2,0624i \\ -9,4429 \\ -10,0013 \end{pmatrix}$
0,02	$\begin{pmatrix} 0,0074 \\ 0,3277 \\ 23,5853 \\ 38,9587 \\ 203,1142 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -32,8905 \\ -1,2514 + 2,0528i \\ -1,2514 - 2,0528i \\ -8,7809 \\ -10,0006 \end{pmatrix}$

Рассмотрим первый подход, который связан с нахождением псевдорешения линейной модели измерительной системы и его использованием в управлении. На рис. 1 представлены результаты запуска для системы с произвольными внешними возмущениями, которые удовлетворяют условию $\int_0^t \|w(t)\|^2 dt \leq 1$.

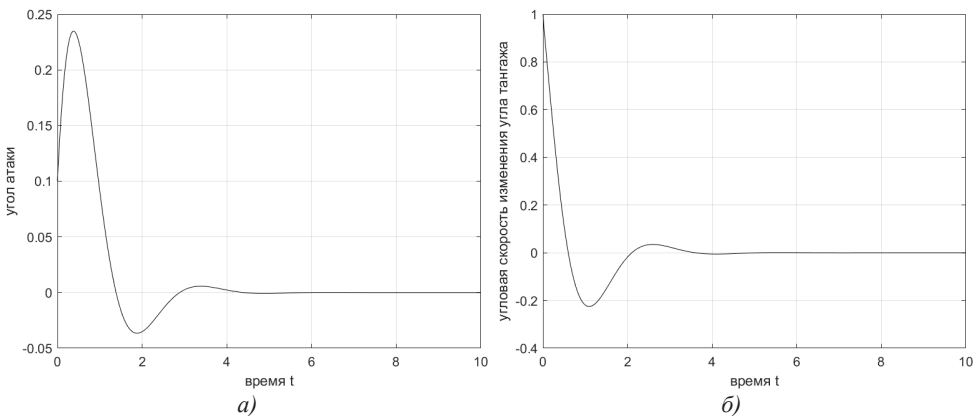


Рис.1. Первый подход, произвольные возмущения а – изменение угла атаки, б – изменение угловой скорости изменения угла тангажа



На рис. 2 можно наблюдать результат запуска для второго варианта, когда на систему воздействуют наихудшие внешние возмущения: $w(t) = w^*(x(t)) = \frac{1}{\gamma^2} B_1^T K_2 x(t)$.

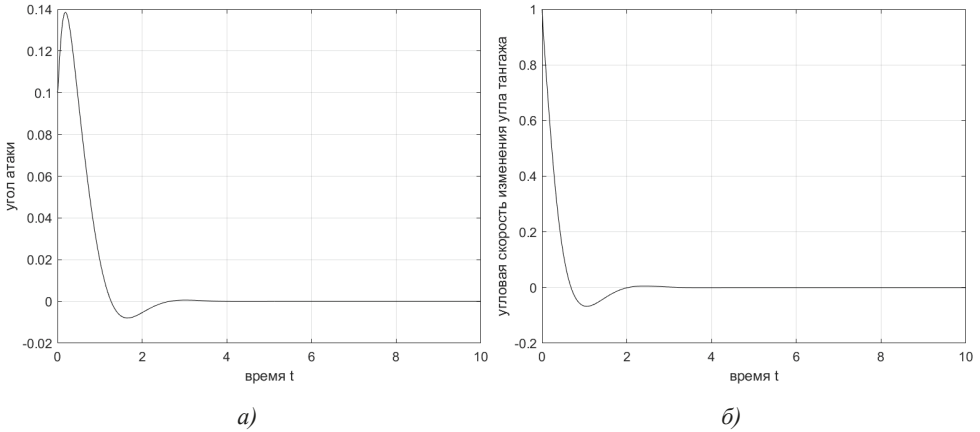


Рис. 2. Первый подход, наихудшие возмущения а – изменение угла атаки, б – изменение угловой скорости изменения угла тангажа

Аналогичные графики переходных процессов приведены на рис. 3–4 для второго подхода, который состоит в синтезе наблюдателя состояния, вырабатывающего оценку вектора состояния, и последующем использовании полученной оценки в управлении.

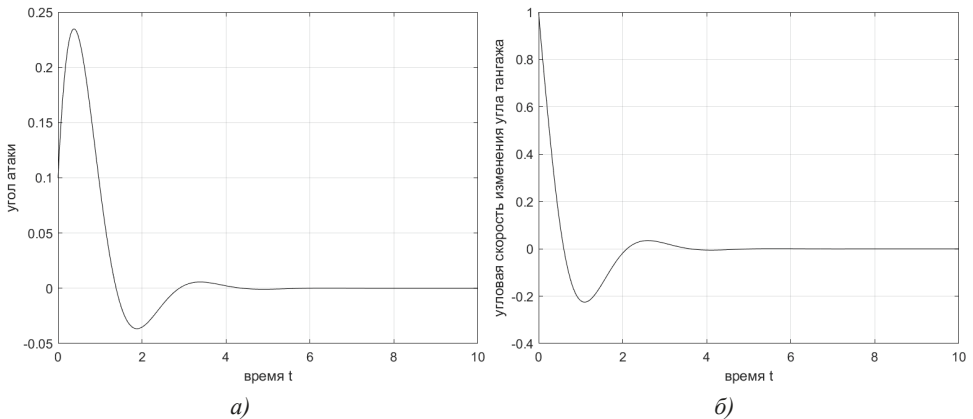


Рис. 3. Второй подход, произвольные возмущения а – изменение угла атаки, б – изменение угловой скорости изменения угла тангажа

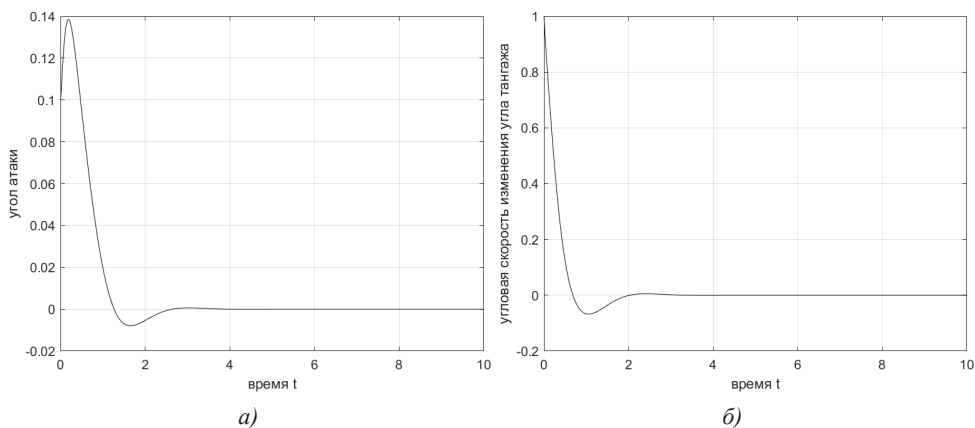


Рис. 4. Второй подход, наихудшие возмущения – изменение угла атаки,
б – изменение угловой скорости изменения угла тангажа

Для произведения вычислений и моделирования использовалась математическая среда MATLAB. На основании рис. 1–4 можно сделать вывод, что оба подхода порождают в целом сравнимые результаты. Каждый из предложенных подходов и вариантов с различными внешними возмущениями обеспечивает асимптотическую устойчивость системы и желаемое качество переходных процессов. Отсюда можно сделать вывод, что каждый из подходов можно использовать при решении прикладных задач. Результаты моделирования свидетельствуют о том, что матрицы в критерии качества S , Q и параметр γ были правильно подобраны. Однако, достаточно большое время, необходимое для достижения переходными процессами нулевых значений, указывает на необходимость детального исследования влияния параметров на свойства полученной замкнутой системы.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения данной работы сформулированы и доказаны достаточные условия H_∞ – управления на конечном промежутке времени, предложены два приближенных подхода нахождения законов управления в условиях неполной информации о векторе состояния, обеспечиваемой измерительной системой. Предложенные подходы были проверены на модельном примере стабилизации самолета. На основании полученных результатов можно сделать вывод, что предложенный алгоритм синтеза линейного H_∞ – регулятора обеспечивает желаемое качество переходных процессов и асимптотическую устойчивость замкнутых систем для каждого из подходов. Полученное управление позволяет парировать влияние внешних воздействий на систему, что было проверено на примере ограниченных произвольных и наихудших возмущений. Предложенные методы могут быть применены к различным задачам управления, например, при проектировании автопилотов или систем автоматической навигации летательных аппаратов.



Литература

1. *Koobloch H.W., Isidori A., Flockerzi D.* Topics in control theory // DMV-Seminar; Bd. 22, Basel ; Springer, 1993.
2. *Doyle J., Francis B., Tannenbaum A.* Feedback Control Theory // Macmillan Publishing Co, 1990.
3. *Skogestad S., Postlethwaite I.* Multivariable Feedback Control: Analysis and Design // John Wiley and sons, 2005.
4. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление // М.: Наука, 2002.
5. *Panteleev A.V. and Yakovleva A.A.* Approximate methods for H-infinity output feedback control // IOP Conf. Ser. Vol.927(1), 2020.
6. *Green M., Limebeer D.J.N.* Linear Robast Control // Dover Publications, 2012.
7. *Panteleev A.V., Yakovleva A.A.* An Airplane Stabilization Control by H-Inf Approach // «2020 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon)» DOI: 10.1109/FarEastCon50210.2020.9271615
8. *Gadewadikar J., Lewis F.L., Abu-Khalaf M.* Necessary and Sufficient Conditions for H-infinity Static Output-Feedback Control // Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol.29, No. 4, 2006.



Synthesis of H-Infinity Controllers in a Finite Time Interval

Andrei V. Pantelev*

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>

e-mail: avpantelev@inbox.ru

Aleksandra A. Yakovleva**

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

e-mail: ayakovleva982@gmail.com

The article considers a problem of stabilization of an aircraft, which can be solved by finding output control. Sufficient conditions for H-inf- output control for linear dynamic systems are obtained. Two approximate methods of closed-loop systems synthesis are proposed. The first one is based on finding a pseudo-inverse matrix of the linear measuring system model. The second one based on synthesizing an asymptotic observer, which allows to formulate an estimate of a state vector, giving a possibility of further use of the obtained estimate in the control law. The paper contains a step-by-step algorithm of finding an H-inf -control of a closed-loop system.

Keywords: linear regulator, H_∞ – control, closed loop control, airplane stabilization, algorithm, software, finite time interval

For citation:

Pantelev A.V., Yakovleva A.A. Synthesis of H-infinity Controllers in a Finite Time Interval. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 1, pp. 5–19. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110101> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Koobloch H.W., Isidori A., Flockerzi D. Topics in control theory // DMV-Seminar; Bd. 22, Basel; Springer, 1993.
2. Doyle J., Francis B., Tannenbaum A. Feedback Control Theory // Macmillan Publishing Co, 1990.
3. Skogestad S., Postlethwaite I. Multivariable Feedback Control: Analysis and Design // John Wiley and sons, 2005.
4. Polyak B.T., Scherbakov P.S. Robastnaya ustojchivost' i upravlenie [Robust stability and control]. Moscow: Nauka Publ., 2002.
5. Pantelev A.V. and Yakovleva A.A. Approximate methods for H-infinity output feedback control. IOP Conf. Ser. Vol.927(1), 2020.

***Andrei V. Pantelev**, D.Sc. (Physical and Mathematical Sciences), Full Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute of Information Technology and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpantelev@inbox.ru

****Aleksandra A. Yakovleva**, Master Student, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia, e-mail: ayakovleva982@gmail.com



6. Green M., Limebeer D.J.N. Linear Robast Control // Dover Publications, 2012.
7. Pantelev A.V., Yakovleva A.A. An Airplane Stabilization Control by H-Inf Approach // «2020 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon)» DOI: 10.1109/FarEastCon50210.2020.9271615
8. Gadewadikar J., Lewis F.L., Abu-Khalaf M. Necessary and Sufficient Conditions for H-infinity Static Output-Feedback Control // Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol.29, No. 4, 2006.

О методе построения линейной нестационарной дискретной системы с управлением полной размерности посредством изменения шага квантования

Ибрагимов Д.Н.*

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ),
г. Москва, Российская Федерация,
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>
e-mail: rikk.dan@gmail.com

Новожилкин Н.М.**

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ),
г. Москва, Российская Федерация,
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3308-8371>
e-mail: nikitanovozhilkin261@gmail.com

Работа посвящена рассмотрению метода, который позволяет свести стационарную систему с управлением неполной размерности к нестационарной периодической системе с управлением полной размерности. В работе доказана эквивалентность данных систем, предложен метод, позволяющий на основе оптимального управления модифицированной системы однозначно построить оптимальное управление для исходной системы. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: дискретная линейная система, задача быстродействия, множество управляемости.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18–08–00128-а.

Для цитаты:

Ибрагимов Д.Н., Новожилин Н.М. О методе построения линейной нестационарной дискретной системы с управлением полной размерности посредством изменения шага квантования // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 1. С. 20–32. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110102>

***Ибрагимов Данис Наилевич**, кандидат физико-математических наук, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>, e-mail: rikk.dan@gmail.com

****Новожилкин Никита Максимович**, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3308-8371>, e-mail: nikitanovozhilkin261@gmail.com



1. ВВЕДЕНИЕ

Задача быстродействия известна достаточно давно как задача оптимального управления с естественным функционалом качества – времени, затрачиваемого системой на достижение некоторого заданного терминального состояния [10–12]. При рассмотрении систем с непрерывным временем данная задача не обладает какими-либо существенными особенностями, выделяющими ее из общей проблематики задач теории оптимального управления. Решение полученное на основе принципа максимума Понтрягина [10] гарантирует релейный характер управления для линейных систем.

В то же время системы с дискретным временем имеют ряд фундаментальных отличий от непрерывных систем при построении оптимального управления [13–15]. В то время как в непрерывном случае оптимизационная задача является задачей вариационного исчисления, в дискретном времени она представляет собой задачу выпуклого программирования. Данный факт определяет принципиально иной набор средств для построения оптимальных процессов в дискретном случае. Но не смотря на то, что посредством дискретного принципа максимума [15, 16] и метода динамического программирования [17] удастся решить большую часть задач теории оптимального управления дискретными системами, для решения задачи быстродействия они оказываются неприменимыми в силу нерегулярности экстремума почти для всех начальных состояний, неединственности оптимальной траектории и дискретного характера критерия качества управления – числа шагов необходимого для достижения фиксированного терминального состояния из заданного начального [5, 18].

В связи с чем оказывается актуальным поиск альтернативных подходов для решения поставленной задачи. На данный момент продемонстрировал свою эффективность метод, базирующийся на использовании множеств 0-управляемости [19] – множеств тех начальных состояний, из которых за конечное число шагов возможно перевести систему в начало координат посредством выбора допустимого управления. При этом доказано, что метод решения во многом зависит от ограничений, накладываемых на управление. В случае строго выпуклых ограничений для построения оптимального по быстродействию управления удастся модифицировать известный принцип максимума [4, 5, 18].

Тем не менее существенным ограничением в использовании средств, представленных в [4, 5, 18], является предположение о непустой внутренности множества допустимых значений управления в фазовом пространстве, что эквивалентно тому, что размерность вектора управления должна совпадать с размерность вектора состояния. Зачастую в прикладных задачах оптимального управления это условие не выполняется.

В данной работе предложен метод построения нестационарной дискретной системы с периодической матрицей и множеством допустимых значений управлений полной размерности, которая эквивалентна исходной стационарной системе. Доказано, что оптимальное по быстродействию управление для нестационарной системы, построенное на основе методов из [4], является также оптимальным и для исходной системы. Эффективность полученных методов продемонстрирована на примере решения задачи оптимальной по быстродействию коррекции орбиты спутника.



2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейная дискретная система управления с дискретным временем и ограниченным множеством управлений (A, U) :

$$\begin{aligned} y(k+1) &= Ay(k) + v(k), \\ y(0) &= x_0, \quad v(k) \in U, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $y(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u(k) \in U$ – вектор управления, A – матрица системы. Предполагается, что $U \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое и компактное, $0 \in \text{ri}U$, $\det A \neq 0$. Для системы (A, U) решается задача быстродействия, т.е. требуется вычислить минимальное число шагов N_{\min} , за которое можно перевести систему из заданного начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в начало координат, а также построить процесс $\{y^*(k), v^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$, удовлетворяющий условию $y^*(N_{\min}) = 0$, который будем называть оптимальным. Известны два основных подхода к решению задачи быстродействия для системы (1). Модифицированный принцип максимума [5, 18] и метод динамического программирования Беллмана [17], основывающийся на проведении предварительной полиэдральной аппроксимации множества U [2]. Существенным ограничением в использовании вышеописанных подходов является выполнение включения $0 \in \text{int}U$, что с учетом предположения $0 \in \text{ri}U$ эквивалентно условию

$$\dim U = n. \quad (2)$$

Тем не менее на практике условие (2) далеко не всегда оказывается справедливым, поскольку вектор управления, как правило, имеет размерность меньше размерности вектора состояния. В рамках данной статьи требуется построить нестационарную линейную дискретную систему эквивалентную системе (1), для которой выполнено условие (2)

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, \quad u(k) \in U, \\ 0 &\in \text{int}U(k), \quad \det A(k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Эквивалентность систем (1) и (3) понимается в том смысле, что для любого начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ оптимальный процесс $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ системы (3) однозначно порождает оптимальный процесс $\{y^*(k), v^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ системы (1). При этом оптимальное значение критерия в задаче быстродействия для стационарной системы N_{\min} и для нестационарной системы N_{\min}^* могут отличаться.

3. ИЗМЕНЕНИЕ ШАГА КВАНТОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим метод, который позволяет свести систему вида (1) к эквивалентной ей нестационарной линейной дискретной системе, удовлетворяющей условию (2). Предложенный далее подход основывается на изменении шага квантования системы (1) таким образом, чтобы вектор состояния новой системы удовлетворял условию



(2). Для разрешимости поставленной задачи будем предполагать, что система (1) управляема [1], т.е.

$$\text{Lin} \{U + AU + \dots + A^{n-1}U\} = \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

Будем полагать, что $\dim U = m < n$, множество U имеет вид параллелограмма:

$$\begin{aligned} U &= B\{v \in \mathbb{R}^m : v_j \in [u_{j,\min}; u_{j,\max}], j = \overline{1, m}\}, \\ B &= (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{n \times m}, \text{ rank } B = m, \\ u_{j,\min} &< 0, u_{j,\max} > 0, j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (5)$$

В противоположном случае у множества U всегда существует подмножество вида (5), т.к. $0 \in \text{ri}U$, $\dim U = m$. Данный факт позволяет воспользоваться методами построения оптимальных полиэдральных оценок [2], позволяющими свести ограничения на управление в системе (1) к ограничениям вида (5).

В силу (5) для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно представление

$$v(k) = \sum_{j=1}^m (v_j(k) b_j), \quad v_j(k) \in [u_{j,\min}, u_{j,\max}], \quad j = \overline{1, m}.$$

Пусть $M \in \mathbb{N}$ такое, что $M \cdot m$ – наименьшее общее кратное для чисел m и n . Тогда для произвольного $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно представление

$$\begin{aligned} y(M + k_0) &= A^M y(k_0) + \sum_{i=0}^{M-1} A^{M-1-i} v(k_0 + i) = \\ &= A^M y(k_0) + A^{M-1} b_1 v_1(k_0) + \dots + A^{M-1} b_m v_m(k_0) + \dots + b_1 v_1(k_0 + M - 1) + \\ &\quad + \dots + b_m v_m(k_0 + M - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(k_0) &= y(k_0), \\ x(k_0 + 1) &= A^M x(k_0) + u_1(k_0) + \dots + u_n(k_0), \\ x(k_0 + k + 1) &= x(k_0 + k) + u_{kn+1}(k_0) + \dots + u_{kn+n}(k_0), \\ k &= 1, \frac{M \cdot m}{n} - 1, \frac{M \cdot m}{n} > 1. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} u_{i-m+j}(k_0) &= A^{M-1-i} b_j v_j(k_0 + i), \\ i &= \overline{0, M-1}, j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (6)$$

Также для произвольного $l = \overline{1, M \cdot m}$ через $i(l)$ и $j(l)$ обозначим такие числа, что

$$l = i(l)m + j(l), \quad i(l) \in \{0, \dots, M-1\}, \quad j(l) \in \{1, \dots, m\},$$

т.е.

$$j(l) = (l-1) \bmod m + 1,$$

$$i(l) = \frac{l - j(l)}{m}.$$



С учетом (5) верно, что

$$u_l(k_0) \in \text{conv} \{u_{j(l), \min} A^{M-1-i(l)} b_{j(l)}; u_{j(l), \max} A^{M-1-i(l)} b_{j(l)}\}.$$

Тогда

$$y(M + k_0) = A^M y(k_0) + u_1(k_0) + \dots + u_{Mm}(k_0). \quad (7)$$

Определим набор векторов $\{x(k)\}_{k=k_0}^{\frac{Mm}{n}+k_0}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} x(k_0) &= y(k_0), \\ x(k_0 + 1) &= A^M x(k_0) + u_1(k_0) + \dots + u_n(k_0), \\ x(k_0 + k + 1) &= x(k_0 + k) + u_{kn+1}(k_0) + \dots + u_{kn+n}(k_0), \\ k &= 1, \frac{M \cdot m}{n} - 1, \frac{M \cdot m}{n} > 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Определим следующую нестационарную линейную дискретную систему:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, u(k) \in U(k), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ A(k) &= \begin{cases} A^M, \frac{k \cdot n}{M \cdot m} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ I, \frac{k \cdot n}{M \cdot m} \notin \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

$$U(k) = \sum_{l=l_0}^{n+l_0-1} \text{conv} \{u_{j(l), \min} A^{M-1-i(l)} b_{j(l)}; u_{j(l), \max} A^{M-1-i(l)} b_{j(l)}\},$$

где

$$l_0 = n \cdot k \cdot \left(\text{mod} \frac{M \cdot m}{n} \right) + 1.$$

Тогда система (9) согласно построениям является искомой эквивалентной системой. Сформулируем данный факт в виде следующей теоремы.

Теорема 1.

Пусть система (1) удовлетворяет условию управляемости (4). Управляющие воздействия систем (1) и (9) удовлетворяют равенству (6) для всех $k_0 \in \{0; M; 2M; 3M; \dots\}$.

Тогда

- i) $\dim U(k) = n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- ii) $y(Mk) = x\left(\frac{M \cdot m}{n} \cdot k\right), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- iii) $y(k) = 0$ тогда и только тогда, когда $x(k^*) = 0$,

где

$$k^* = \begin{cases} \frac{k \cdot m}{n}, \frac{k \cdot m}{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \left[\frac{k \cdot m}{n} \right] + 1, \frac{k \cdot m}{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$



Доказательство. Равенство в пункте *i*) следует из предположения (4) и определения множеств $U(k)$ в (9). Равенство *ii*) следует непосредственно из (7) и (8) в случае, когда $k_0 = 0$, и продолжения соотношений (8) для произвольного $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ по периодичности. Условие *iii*) вытекает из (6) и (7).

Следствие 1 Пусть величина n кратна m , т.е. $\frac{n}{m} \in \mathbb{N}$. Тогда система (9) стационарная.

Доказательство. В силу того, что $M \cdot m$ – наименьшее общее кратное m и n , верно равенство

$$M \cdot m = n \quad \frac{M \cdot m}{n} = 1.$$

Тогда согласно (9) для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$A(k) = A^M,$$

$$U(k) = \sum_{l=1}^n \text{conv} \{u_{j(l), \min} A^{M-1-i(l)} b_{j(l)}; u_{j(l), \max} A^{M-1-i(l)} b_{j(l)}\},$$

т.е. $A(k)$ и $U(k)$ постоянны.

Замечание 1.

Теорема 1 позволяет свести решение задачи быстрогодействия для системы (1) к решению аналогичной задачи для системы полной размерности (9). При этом переход от оптимального управления в системе (9) к оптимальному управлению в системе (1) может быть выполнен при помощи соотношений (6).

4. ПРИМЕРЫ

Пример 1.

Пусть $n = 4, A = I \in R^{4 \times 4}, m = 3,$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_{j, \min} = -1, u_{j, \max} = 1, j = \overline{1, 4}.$$

Заметим, что для данной системы не выполняется условие управляемости (4):

$$\text{Lin} \{U + AU + A^2U + A^3U\} \neq \mathbb{R}^4.$$

Покажем, что данное условие существенно для теоремы 1.

По определению $M = 4$, система (9) будет периодической с периодом равным $\frac{M \cdot m}{n} = 3$. В таком случае

$$U(0) = 2 \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$



$$U(1) = 2\text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$U(2) = 2\text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Таким образом, размерность каждого множества $U(k)$ оказывается меньше размерности фазового пространства.

Пример 2.

Пусть $n = 6, m = 4$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_{j,\min} = -1, u_{j,\max} = 1, j = \overline{1, 4}.$$

В отличие от примера 1 для данных матриц A и B , условие (4) оказывается выполнено. Построим нестационарную систему эквивалентную системе (1) при помощи теоремы 1. По определению $M = 3$, система (9) будет периодической с периодом равным $\frac{M \cdot m}{n} = 2$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$A(k) = \begin{cases} A^3, & \frac{k}{2} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ I, & \frac{k}{2} \notin \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{cases}$$

$$U(0) = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ 13 \\ 19 \\ 9 \\ 17 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -14 \\ -12 \\ -13 \\ -19 \\ -9 \\ -17 \end{pmatrix} \right\} + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 22 \\ 21 \\ 21 \\ 20 \\ 27 \\ 13 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -22 \\ -21 \\ -21 \\ -20 \\ -27 \\ -13 \end{pmatrix} \right\} + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 18 \\ 10 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -18 \\ -15 \\ -15 \\ -15 \\ -18 \\ -10 \end{pmatrix} \right\} + \dots$$



$$\begin{aligned}
 & +\text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -13 \\ -12 \\ -12 \\ -12 \\ -15 \\ -8 \end{pmatrix} \right\} + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, \\
 & +\text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.
 \end{aligned}$$

Можно заметить, что для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, верно равенство $\dim U(k) = n = 6$.

5. ЗАДАЧА НАИСКОРЕЙШЕЙ КОРРЕКЦИИ ОРБИТЫ СПУТНИКА

Задача коррекции спутника рассматривалась в различных монографиях [8, 9]. Необходимость управления движением спутником связана с тем, что в силу технических ограничений его не всегда удастся вывести на расчетную орбиту, а также в связи с внешними факторами, которые оказывают негативное влияние на траекторию движения спутника. В результате спутник оказывается в некоторой малой окрестности расчетной траектории. Существуют различные подходы к построению математической модели движения спутника на круговой орбите, которые определяют задачу оптимизации. В [8, 9] все возмущающие факторы рассматриваются, как случайные процессы. В [8] изложено решение задачи коррекции спутника с критерием в форме квантили. В описанных работах число импульсов является фиксированным. Задача быстрогодействия для системы управления положением спутника на околокруговой орбите была рассмотрена в [4]. Движение спутника на круговой орбите описывается уравнениями:

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= v_R, \\
 \dot{\theta} &= \frac{v_T}{r}, \\
 \dot{v}_R &= \frac{v_R^2}{r} - \frac{1}{r^2}, \\
 \dot{v}_T &= -\frac{v_R v_T}{r},
 \end{aligned}$$



где r – расстояние от начала координат до спутника, θ – угол поворота, v_R и v_T – радиальная и тангенциальная составляющие скорости спутника соответственно. Обозначим отклонения реальных значений вектора состояния от желаемых следующим образом:

$$\Delta r = r - r_0,$$

$$\Delta v_R = v_R - v_{R0},$$

$$\Delta v_T = v_T - v_{T0}.$$

Предполагая, что отклонения невелики, перейдем к линеаризованной системе

$$\Delta \dot{r} = \Delta v_R,$$

$$\Delta \dot{v}_R = \Delta r + 2\Delta v_T,$$

$$\Delta \dot{v}_T = -\Delta v_R.$$

Введем обозначение $z(t) = (\Delta r, \Delta v_R, \Delta v_T)^T$.

Управление подается импульсно через равные промежутки времени Δt , рассмотрим в качестве параметров системы вектор состояния в моменты времени $k\Delta t$, т.е. перед выполнением $(k+1)$ -го корректирующего импульса, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пусть $w_1(k), w_2(k) \in [-\alpha_{max}; \alpha_{max}]$ – корректирующие импульсы, направленные вдоль радиальной и тангенциальной направляющих скоростей и исполняемые в момент времени $k\Delta t$, $y(k) = z(k\Delta t)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Получим конечно-разностные рекуррентные соотношения:

$$y(k+1) = \tilde{A}y(k) + \tilde{B}w(k),$$

$$y(0) = z_0, w(k) \in [-\alpha_{max}; \alpha_{max}] \times [-\alpha_{max}; \alpha_{max}], k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\cos\Delta t + 2 & \sin\Delta t & -2\cos\Delta t + 2 \\ \sin\Delta t & \cos\Delta t & 2\sin\Delta t \\ \cos\Delta t - 1 & -\sin\Delta t & 2\cos\Delta t - 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \sin\Delta t & -2\cos\Delta t + 2 \\ \cos\Delta t & 2\sin\Delta t \\ -\sin\Delta t & 2\cos\Delta t - 1 \end{pmatrix}, w(k) = \begin{pmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \end{pmatrix}.$$

$$B(k) = \begin{cases} \left(\begin{pmatrix} \sin\Delta t \\ \cos\Delta t \\ -\sin\Delta t \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2\cos\Delta t + 2 \\ 2\sin\Delta t \\ 2\cos\Delta t - 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \sin\Delta t \\ \cos\Delta t \\ -\sin\Delta t \end{pmatrix} \right), & k = 0, 2, 4, \dots, \\ \left(\begin{pmatrix} -2\cos\Delta t + 2 \\ 2\sin\Delta t \\ 2\cos\Delta t - 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \sin\Delta t \\ \cos\Delta t \\ -\sin\Delta t \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -2\cos\Delta t + 2 \\ 2\sin\Delta t \\ 2\cos\Delta t - 1 \end{pmatrix} \right), & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

$$A(k) = \begin{cases} \tilde{A}^2, & k = 0, 2, 4, \dots, \\ \tilde{A}, & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$



В итоге получим линейную нестационарную дискретную систему управления следующего вида:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)\tilde{u}(k), \\ x(0) &= z_0, \quad \tilde{u}(k) \in [-\alpha_{max}; \alpha_{max}] \times [-\alpha_{max}; \alpha_{max}], \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Или же эквивалентную ей систему

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + u(k), \\ x(0) &= z_0, \quad u(k) \in U(k), \\ U(k) &= B(k)[- \alpha_{max}; \alpha_{max}] \times [- \alpha_{max}; \alpha_{max}], \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{10}$$

Для проведения численных расчетов используем следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} \Delta t &= 0.25, \\ \alpha_{max} &= 0.0035, \\ z_0 &= 10^{-2} \cdot (-3.42118; -1.14367; 2.3381)^T. \end{aligned}$$

Наименьшее число шагов, необходимое для достижения начала координат, составляет $N_{min} = 4$. Вычисления проведем согласно методам разработанных в [4]. Представим полученные результаты в виде следующих таблиц:

Таблица 1

Оптимальная траектория

k	$x_1^*(k)$	$x_2^*(k)$	$x_3^*(k)$
0	$-3.42118 \cdot 10^{-2}$	$-1.14367 \cdot 10^{-2}$	$2.3381 \cdot 10^{-2}$
1	$-1.53386 \cdot 10^{-2}$	$-1.00378 \cdot 10^{-2}$	$1.0599 \cdot 10^{-2}$
2	$-0.495015 \cdot 10^{-2}$	$-0.73491 \cdot 10^{-2}$	$0.5069 \cdot 10^{-2}$
3	$-0.01017 \cdot 10^{-2}$	$-0.24105 \cdot 10^{-2}$	$0.0917 \cdot 10^{-2}$
4	0	0	0

Таблица 2

Оптимальное управление

k	$u_1^*(k)$	$u_2^*(k)$	$u_3^*(k)$
0	$0.14177 \cdot 10^{-2}$	$0.44627 \cdot 10^{-2}$	$0.03521 \cdot 10^{-2}$
1	$0.11641 \cdot 10^{-2}$	$0.45594 \cdot 10^{-2}$	$0.05720 \cdot 10^{-2}$
2	$0.15861 \cdot 10^{-2}$	$0.01538 \cdot 10^{-2}$	$0.2588 \cdot 10^{-2}$
3	$0.11938 \cdot 10^{-2}$	$0.50233 \cdot 10^{-2}$	$0.27515 \cdot 10^{-2}$

Таким образом мы получаем значение $N_{min} = 4$ для системы (10), что в силу теоремы 1 эквивалентно 6 шагам в исходной стационарной системе управления.



Литература

1. Сиротин А.Н. Управляемость линейных дискретных систем с ограниченным управлением и (почти) периодическими возмущениями, Автомат. и телемех., 2001, выпуск 5, С. 53–64
2. Костоусова Е.К. О внешнем полиэдральном оценивании множеств достижимости в «расширенном» пространстве для линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление. // Вычислительные технологии. 2004. Т 9. № 4. С. 54–72.
3. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
4. Ибрагимов Д.Н. Оптимальная по быстродействию коррекция орбиты спутника // Электрон. журн. Тр. МАИ. 2017. № 94.
5. Ibragimov D.N. On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 3. P. 393–412.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.
7. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1966.
8. Малышев В.В., Кибзун А.И. Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
9. Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Бобронников В.Т и др. Спутниковые системы мониторинга. М.: МАИ, 2000.
10. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
11. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
12. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
13. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их приложения в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
14. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
15. Проной А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
16. Holtzman J.M., Halkin H. Directional Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems // J. SIAM Control. V. 4. No. 2. 1966. P. 263–275.
17. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1960.
18. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 10. P. 1731–1756.
19. Sirotin A.N., Formal'skii A.M. Reachability and Controllability of Discrete-Time Systems under Control Actions Bounded in Magnitude and Norm // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 12. P. 1844–1857.



On a Method for Constructing a Linear Nonstationary Discrete System with Full-Dimensional Control by Changing the Quantization Step

Danis N. Ibragimov *

Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>
e-mail: rikk.dan@gmail.com

Nikita M. Novozhilkin **

Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3308-8371>
e-mail: nikitanovozhilkin261@gmail.com

The method that allows one to reduce a stationary system with control of incomplete dimension to a non-stationary periodic system with control of full dimension is considered in this article. The paper proves the equivalence of these systems, and also that the optimal in terms of speed for a non-stationary system is also optimal for the original stationary system. A satellite attitude control system is considered as an example.

Keywords: linear discrete-time control system, performance problem, set of controllability.

Funding. The work was carried out with the financial support of the RFBR grant No. 18–08–00128-a.

For citation:

Ibragimov D.N., Novozhilkin N.M. On a Method for Constructing a Linear Nonstationary Discrete System with Full-Dimensional Control by Changing the Quantization Step. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 1, pp. 20–32. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110102> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Sirotin A.N. Controllability of linear discrete systems with bounded control and (almost) periodic disturbances // *Automatica and telemekhanika*. 2001. No.5. P. 53–64.
2. Kostousova E.K. External polyhedral estimation of reachable sets in an “extended” space for linear multistage systems with integral constraints on control // *Vichislitelnye Tekhnologii*. 2004. V 9. No. 4. P. 54–72.
3. Rokafellar P. *Convex Analysis*.// Mir, 1973.
4. Ibragimov D.N. Speed-optimal satellite orbit correction // *Electron.Trudy. MAI*. 2017. No. 94.

***Danis N. Ibragimov**, PhD (mathematics and physics), Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>, e-mail: rikk.dan@gmail.com

****Nikita M. Novozhilkin**, Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3308-8371>, e-mail: nikitanovozhilkin261@gmail.com



5. Ibragimov D.N. On the speed problem for a class of linear autonomous infinite-dimensional systems with discrete time, bounded control, and a degenerate operator // *Automatica and telemechanica*. 2019. No. 2. P. 32–59.
6. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of function theory and functional analysis. Fizmatlit, 2012.
7. Danford N., Shvartz Dj. V. Linear operators. V. 2. Spectral theory. Self-adjoint operators in a Hilbert space//Mir, 1966.
8. Malishev V.V., Kibzun A.I. Analysis and synthesis of high-precision control of aircraft.// *Mashinostroenie*, 1987.
9. Malishev V.V., Krasilchikov M.N., Bobronnikov V.T and other. Satellite monitoring systems. // MAI, 2000.
10. Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mischenko B.F. Mathematical theory of optimal processes. // Nauka, 1969.
11. Boltyansky V.G. Optimal control mathematical methods. // Nauka, 1969.
12. Moiseev N.N. Elements of the theory of optimal systems. // Nauka, 1975.
13. Evtushenko Y.G. Methods for solving extreme problems and their applications in optimization systems. // Nauka, 1982.
14. Boltyansky V.G. Optimal control of discrete systems. //Nauka, 1973.
15. Propoi A.I. Elements of the theory of optimal discrete processes. // Nauka, 1973.
16. Holtzman J.M., Halkin H. Directional Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems // *J. SIAM Control*. V. 4. No. 2. 1966. P. 263–275.
17. Bellman R. Dynamic programming. // IIL, 1960.
18. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the speed problem for a class of linear autonomous infinite-dimensional systems with discrete time and bounded control. // *Automatica and telemechanica*. 2017. No. 10. P. 3–32.
19. Sirotin A.N., Formalsky A.M. Achievability and controllability of discrete systems with limited in magnitude and impulse control actions // *Automatica and telemechanica*. 2003. No. 12. P. 17–32.

◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ **МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ** ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 519.1

Алгоритм покрытия вершин ориентированного графа

Князатов М.О. *

Московский авиационный институт (МАИ),
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2346-4364>
e-mail: mike-99@bk.ru

Рассказова В.А. **

Московский авиационный институт (МАИ),
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4943-3133>
e-mail: varvara.rasskazova@mail.ru

В статье представлен алгоритм решения прикладной задачи о назначении и перемещении локомотивов, основанный на решении теоретико–графовой задачи о покрытии вершин ориентированного графа множеством ориентированных путей. Приведён подробный пример для алгоритма покрытия вершин ориентированного графа множеством максимальных путей.

Ключевые слова: покрытие вершин графа, перемещение локомотивов, множество путей.

Для цитаты:

Князатов М.О., Рассказова В.А. Алгоритм покрытия вершин ориентированного графа // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 1. С. 33–39. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110103>

***Князатов Михаил Олегович**, студент, Московский авиационный институт (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2346-4364>, e-mail: mike-99@bk.ru

****Рассказова Варвара Андреевна**, кандидат физико-математических наук, Московский авиационный институт (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4943-3133>, e-mail: varvara.rasskazova@mail.ru



1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о назначении и перемещении локомотивов лежит в основе процесса организации грузовых железнодорожных перевозок, как основная задача оптимального распределения и использования технических и экономических ресурсов. Актуальные средства для исследования и разработки в области организации грузовых железнодорожных перевозок предоставляет теория графов как основной инструмент математического моделирования транспортных сетей. В работе исследуется, в том числе посредством методов теории графов и комбинаторной оптимизации, задача моделирования и оптимального планирования железнодорожных перевозок и задачи теории расписаний.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим ориентированный граф зависимостей перевозок, где каждая вершина s – некоторое задание на перевозку, подлежащее исполнению. Будем рассматривать вершину как время отправления локомотива из точки А и прибытия в точку Б или наоборот. Каждый локомотив может отправиться в следующий рейс, не раньше, чем через 10 минут после прибытия его на данную точку. Таким образом получается, что данный граф (рис. 1) является совокупностью всех возможных комбинаций прохождения всех рейсов. Рассмотрим модельный пример.

А→Б	Б→А
S1) 3:00 → 6:40	S2) 4:50 → 10:00
S3) 5:10 → 9:20	S4) 5:30 → 9:40
S5) 9:50 → 16:30	S7) 11:40 → 18:30
S6) 11:10 → 17:40	S8) 17:10 → 21:40

Составим список смежности вершин.
(1; 7,8)
(2; 6)
(3; 7,8)
(4; 5,6)
(5; 8)

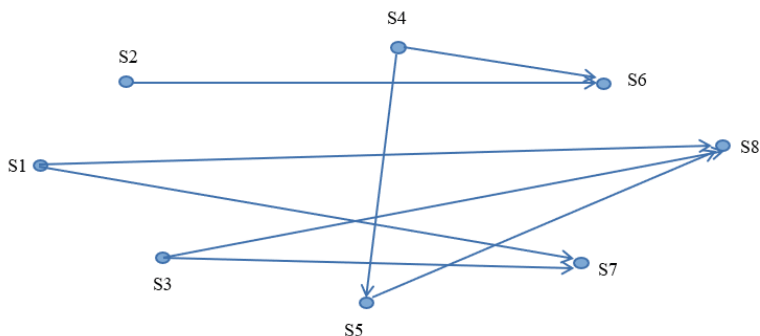


Рис. 1. Ориентированный граф зависимостей перевозок

Как видно, на графе были задействованы все вершины. Наша задача состоит в том, чтобы «покрыть» все вершины, используя минимальное количество локомотивов.



3. АЛГОРИТМ

Перед использованием алгоритма для решения поставленной задачи, нам следует перенести списки смежности вершин в матричный вид, где 1 – это покрытая вершина, а 0 – нет, а каждая строка – это возможный путь локомотива.

Так выглядит матрица для вышерассмотренного примера:

```
1 0 0 0 0 0 1 0
1 0 0 0 0 0 0 1
0 1 0 0 0 1 0 0
0 0 1 0 0 0 1 0
0 0 1 0 0 0 0 1
0 0 0 1 1 0 0 1
0 0 0 1 0 1 0 0
0 0 0 0 1 0 0 1
```

Введем в рассмотрение следующие критерии выбора строки матрицы в строящееся решение:

Ind1 – количество путей, которое содержит вершину s_n .

Ind2 – значение для каждой строки, которые представляет собой количество непокрытых вершин на данном пути.

Ind3 – сумма всех **Ind1** для данного пути.

Ind4 – минимально значение **Ind1** на данном пути.

4. ШАГИ АЛГОРИТМА

- 1.1 Выбираем по второму индикатору (**Ind2**), от большего значения к меньшему.
- 1.2 При равенстве значений по Ind 2 выбираем по третьему индикатору (**Ind3**), от меньшего значения к большему.
- 1.3 При равенстве предыдущих индикаторов выбираем по четвёртому индикатору (**Ind4**), от меньшего значения к большему.
2. Повторяем 1 пункт, пока не будут покрыты все точки.

5. ПРИМЕР

Рассмотрим матрицу путей:

```
0 1 1 0 0 0 1 0 0 0
1 1 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 1 0 1 0 0 1 1
0 0 0 0 0 0 1 0 0 1
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
1 1 0 1 0 0 0 1 0 0
1 1 1 0 0 0 0 0 1 0
0 0 1 0 0 1 0 0 0 1
```



Проделаем шаги алгоритма. Для удобства к матрице добавим «шапку», которая представляет собой массив из 0 и 1 длиной равную строке матрицы, где 1 – ещё не покрытая вершина, а 0 – покрытая.

«шапка»	→	<u>1 1 1 1 1 1 1 1 1 1</u>	Ind2	Ind3	Ind4
		0 1 1 0 0 0 1 0 0 0	3	9	2
		1 1 0 0 0 0 0 1 0 0	3	9	2
	→	0 0 0 1 0 1 0 0 1 1	4v	9v	2
		0 0 0 0 0 0 1 0 0 1	2	5	2
		0 0 0 0 1 0 0 0 0 0	1	1	1
		1 1 0 1 0 0 0 1 0 0	4v	11	2
		1 1 1 0 0 0 0 0 1 0	4v	12	2
		0 0 1 0 0 1 0 0 0 1	3	8	2

Выбираем 1-й путь, сохраняем его и убираем из матрицы. Далее исправлению подлежит «шапка» матрицы – убираем покрытые пути. Напомним, что вершины, которые в «шапке» равны 0, в расчет не принимаются.

Приступим к поиску следующего пути:

	→	<u>1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 </u>	Ind2	Ind3	Ind4
		0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 	3v	9v	2v
		1 1 0 0 0 0 0 1 0 0	3v	9v	2v
		0 0 0 0 0 0 1 0 0 1	1	2	2
		0 0 0 0 1 0 0 0 0 0	1	1	1
		1 1 0 1 0 0 0 1 0 0	3v	9v	2v
		1 1 1 0 0 0 0 0 1 0	3	10	3
		0 0 1 0 0 1 0 0 0 1	1	3	3

На этот раз введенным эвристическим критериям удовлетворяют сразу три пути, выбираем первый из них.

Ищем следующий:

	→	<u>1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 </u>	Ind2	Ind3	Ind4
		1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 	2v	5v	2v
		0 0 0 0 0 0 1 0 0 1	0	0	0
		0 0 0 0 1 0 0 0 0 0	1	1	1
		1 1 0 1 0 0 0 1 0 0	2v	5v	2v
		1 1 1 0 0 0 0 0 1 0	1	3	3
		0 0 1 0 0 1 0 0 0 1	0	0	0

На этот раз критериям удовлетворяют два пути, выбираем первый из них и продолжаем. Осталась всего одна непокрытая вершина.

	→	<u> 0 0 0 0 1 0 0 0 0 </u>	Ind2	Ind3	Ind4
		0 0 0 0 0 0 1 0 0	0	0	0
		 0 0 0 0 1 0 0 0 0 	1v	1	1
		1 1 0 1 0 0 0 1 0	0	0	0
		1 1 1 0 0 0 0 0 1	0	0	0
		0 0 1 0 0 1 0 0 0	0	0	0



Когда последняя вершина оказывается покрытой, алгоритм завершает свою работу. Таким образом итоговая матрица путей выглядит следующим образом:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Из представленного примера следует, что для покрытия всех вершин, то есть для исполнения всех перевозок, понадобится 4 локомотива.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье были приведена постановка общей задачи оптимизации планирования грузовых железнодорожных перевозок с минимизацией затрат на перевозки. Так же был рассмотрен алгоритм покрытия вершин ориентированного графа. Полученные результаты могут быть использованы при разработке автоматизированных систем управления грузовыми перевозками.

Литература

1. *Лазарев А.А.* Оценки абсолютной погрешности и схема приближенного решения задач теории расписаний // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 2. С. 14–34.
2. *Гафаров Е.Р., Лазарев А.А.* Преобразование сетевого графика задач теории расписаний с ограничениями предшествования // ДАН. 2008. Т. 424. № 2. С. 7–9.
3. *Burdett O., Kozan E.* A Disjunctive Graph Model and Framework for Constructing New Train Schedules // Eur. J. Oper. Res. 2010. V. 200. P. 85–98.
4. *Gholami O., Sotskov Y.N.* Mixed Graph Model and Algorithms for Parallel Machine Job shop Scheduling Problems // Int. J. Production Research. 2015. V. 8. P. 1–16.
5. *Lusby R., Ryan D.* Railway Track Allocation: Models and Methods // Oper. Res. Spektrum. 2011. V. 33. P. 843–883.
6. *Гайнанов Д.Н., Рассказова В.А.* Математическое моделирование в задаче оптимального назначения и перемещения локомотивов методами теории графов и комбинаторной оптимизации // Труды МАИ. 2017. № 92.
7. *Осипов С.И., Осипов С.С.* Основы тяги поездов. М.: УМК МПС, 2000, 592 С.
8. *Гайнанов Д. Н.* Комбинаторная геометрия и графы в анализе несовместных систем и распознавании образов. М.: Наука, 2014, 152 С.
9. *Гайнанов Д.Н., Кибзун А.И., Рассказова В.А.* Теоретико-графовый алгоритм решения задачи о назначении и перемещении локомотивов // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2017. № 5. С. 51–56.
10. *Гайнанов Д.Н., Рассказова В.А.* Алгоритм расшифровки монотонных булевых функций, порожденных неориентированными графами // Вестник ЮРГУ. 2016. Т. 9. № 3. С. 17–30.



An Algorithm for Covering the Vertices of a Directed Graph

Mikhail O. Knyazyatov*

Moscow aviation Institute (MAI), Moscow, Russia
<https://orcid.org/0000-0002-2346-4364>
mike-99@bk.ru

Varvara A. Rasskazova**

Moscow aviation Institute (MAI), Moscow, Russia
<https://orcid.org/0000-0003-4943-3133>
varvara.rasskazova@mail.ru

The article presents an algorithm for solving the applied problem of assigning and moving locomotives, based on the solution of the graph-theoretic problem of covering the vertices of a directed graph with a set of oriented paths. A detailed example is given for an algorithm for covering the vertices of a directed graph with a set of maximal paths.

Keywords: covering the vertices of the graph, moving locomotives, set of paths.

For citation:

Knyazyatov M.O., Rasskazova V.A. An Algorithm for Covering the Vertices of a Directed Graph. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 1, pp. 33–39. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110103> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Lazarev A.A. Estimates of the absolute error and a scheme for an approximate solution to scheduling problems // *Computational Mathematics and Mathematical Physics* volume49, p. 373–386 (2009).
2. Lazarev A.A., Gafarov E.R. Transformation of the network graph of scheduling problems with precedence constraints to a planar graph // *Doklady Mathematics*. 2009. T. 79. № 1. C. 1–3.
3. Burdett O., Kozan E. *A Disjunctive Graph Model and Framework for Constructing New Train Schedules* // *Eur. J. Oper. Res.* 2010. V. 200. P. 85–98.
4. Gholami O., Sotskov Y. N. *Mixed Graph Model and Algorithms for Parallel Machine Job shop Scheduling Problems* // *Int. J. Production Research*. 2015. V. 8. P. 1–16.
5. Lusby R., Ryan D. *Railway Track Allocation: Models and Methods* // *Oper. Res. Spektrum*. 2011. V. 33. P. 843–883.
6. Gainanov D.N., Rasskazova V.A. Mathematical modelling of locomotives' traffic problem by graph theory and combinatorial optimization methods // *Moscow Aviation Institute*. 2017. № 92.

***Mikhail O. Knyazyatov**, student of Moscow aviation Institute (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2346-4364>, e-mail: mike-99@bk.ru

****Varvara A. Rasskazova**, candidate of Physical and Mathematical Sciences, Moscow aviation Institute (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4943-3133>, e-mail: varvara.rasskazova@mail.ru



7. Gainanov D.N. Combinatorial geometry and graphs in an analysis of infeasible systems and pattern recognition. M.: Nauka=M.: Science, 2014, 152 p.
8. Gainanov D.N., Kibzun A.I., Rasskazova V.A. Theoretical-graph Algorithm in the Problem on the Assignments and Transportations of Locomotives // Vestnik computernykh i informatsionnykh tekhnologiy= Bulletin of Computer and Information Technologies. 2017. № 5. p. 51–56.
9. Gainanov D.N., Rasskazova V.A.. An inference algorithm for monotone boolean functions associated with undirected graphs // Bulletin of the South Ural State University Series Mathematical Modelling Programming and Computer Software. 2016. T. 9. № 3. p. 17–30.

О различных подходах к решению экстремальных задач

Куланин Е.Д.*

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>
e-mail: lucas03@mail.ru

Нуркаева И.М.**

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1949-6734>
e-mail: nurkaevaim@yandex.ru

Степанов М.Е.***

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>
e-mail: mestepanov@yandex.ru

В статье рассматриваются геометрический и аналитический методы решения известных экстремальных задач и выявляются логические взаимосвязи между этими задачами, предпочтительность применения того или другого метода решения экстремальных задач показывается на конкретных примерах.

Ключевые слова: Экстремальные задачи, точка Лемуана, точка Люилье, изогональность, центроид, метод множителей Лагранжа, треугольник, тетраэдр.

Для цитаты:

Куланин Е.Д., Нуркаева И.М., Степанов М.Е. О различных подходах к решению экстремальных задач // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 1. С. 40–60.
DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110104>

***Куланин Евгений Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru

****Нуркаева Ирина Михайловна**, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1949-6734>, e-mail: nurkaevaim@yandex.ru

*****Степанов Михаил Евграфович**, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru



1. ВВЕДЕНИЕ

Авторы статьи продолжают тему, связанную с решением экстремальных задач и рассмотренную в статьях авторов ([1] – [2]). Решение экстремальных задач является важной областью работы со студентами. Дело в том, что экстремальные задачи занимают центральное место в современной математике. Кроме того, решение таких задач может основываться на самых разных подходах. Речь может идти как об элементарно-геометрических методах, так и на методах высшей математики. Благодаря этому обстоятельству изучение методов решения экстремальных задач может строиться на основе различных теоретических и методических основаниях.

Важным обстоятельством, которое позволяет связать выработать единую точку зрения на различные методы решения экстремальных задач, является то обстоятельство, что различные задачи часто объединяются одним и тем же местом действия, а именно евклидовой плоскостью или трёхмерным евклидовым пространством. Именно по этой причине здесь уместны как методы классической геометрии, так и методы аналитической геометрии и математического анализа. Книга Р. Декарта «Геометрия» направила геометрию по новому направлению. Итогом реализации картезианской программы стали аналитическая геометрия, математический анализ функций одной переменной, дифференциальная геометрия, теория дифференциальных уравнений. Каждая из этих взаимосвязанных теорий позволяет глубже понять геометрию плоскости.

Для выявления глубоких связей между различными геометрическими теориями необходимо искать различные точки зрения на геометрию евклидовой плоскости. В данной статье как раз и делается подобная попытка.

Авторы последовательно рассматривают элементарно-геометрические методы решения экстремальных задач, а также методы, связанные с аналитической геометрией и математическим анализом. При этом используется подход, изложенный в статье [6].

Здесь рассматривается вопрос об использовании образа силового поля для разработки методики преподавания математики. Та же точка зрения может успешно использоваться при изучении геометрических объектов различного рода.

Суть этого подхода такова. Пусть задано некоторое множество M , тогда скалярным полем (аналог силового поля) на этом множестве называется функция $F: M \rightarrow R$, где R – множество действительных чисел. Графическим представлением (графиком) того же самого поля назовём множество пар $(m, F(m))$, принадлежащих прямому произведению $M \times R$. Суперпозицией нескольких скалярных полей F_1, F_2, \dots, F_n является сумма этих функций.

Поле может просто постулироваться заданием числовой функции на множестве M . Однако, если M является метрическим пространством, а Φ – некоторая фигура в M , то метрика индуцирует поле расстояний от произвольной точки из M до Φ . Это поле можно модифицировать, применив к его значениям функцию действительного переменного. Если в M задано несколько фигур, то мы получим несколько скалярных полей и можем рассмотреть их суперпозицию. Возможны и иные способы



задания скалярных полей в метрических пространствах, например, зависящие от специфических свойств фигуры Φ . В статье рассматривается только случай, когда M – евклидова плоскость, а графическое представление поля является поверхностью в трёхмерном пространстве.

Фактически речь идёт о том, что наличие на плоскости или в пространстве геометрических фигур индуцирует те или иные поля, и в результате естественным образом возникают экстремальные задачи различного характера. Более того, возникает возможность использования образа соответствующего поля в учебных целях. При этом построение визуальных характеристик поля (линий уровня и линий стока) может использоваться вычислительный эксперимент.

Совместное рассмотрение классического метода решения экстремальной задачи и образа силового поля позволяет совершенно иными глазами посмотреть на проблему в целом.

Следует признать, что предлагаемый подход нельзя рассматривать как некий хорошо обкатанный методический приём. Скорее речь идёт о поиске новых связей между хорошо известными теориями и методиками, ранее воспринимавшимися как обособленные.

Ещё одним важным обстоятельством является тот факт, что современное математическое образование должно опираться на поддержку компьютерных технологий. В нашем случае именно вычислительные программы позволяют создавать визуальные образы силовых полей, а также прояснять наличие связей между структурой этих полей и сущностью методов решения экстремальных задач.

В силу соображений, изложенных нами выше, предлагаемая статья распадается на несколько разделов различного характера. И первый из них посвящён элементарно-геометрическим методам решения экстремальных задач.

2. ЭЛЕМЕНТАРНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим сначала следующую задачу.

Задача 1. В плоскости треугольника найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин треугольника минимальна.

Эту задачу легко решить элементарно-геометрическими методами. Пусть G – центроид (точка пересечения медиан треугольника) ABC . Покажем, что векторная сумма $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}$ равна нулю, т.е. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

По правилу параллелограмма $\vec{GA} + \vec{GC} = \vec{GD}$ (рис. 1). Диагонали параллелограмма $AGCD$ пересекаются в середине M стороны AC , поэтому $\vec{GD} = 2\vec{GM}$.

С другой стороны, поскольку медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины, то $\vec{BG} = 2\vec{GM}$ и $\vec{GB} = -2\vec{GM}$, откуда получаем: $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = (\vec{GA} + \vec{GC}) + \vec{GB} = \vec{GD} + \vec{GB} = 2\vec{GM} - 2\vec{GM} = \vec{0}$, что и требовалось доказать.

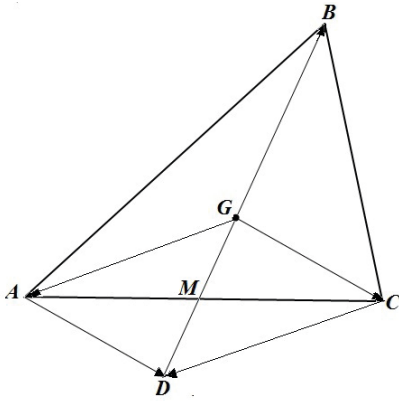


Рис. 1.

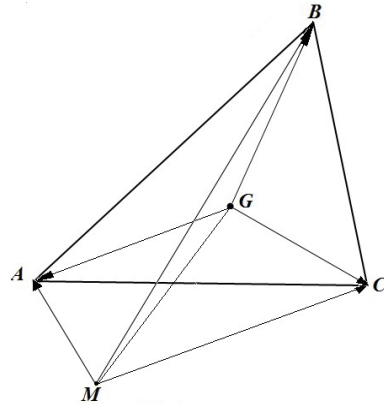


Рис. 2.

Пусть теперь M – произвольная точка плоскости треугольника ABC . Нам нужно минимизировать сумму $MA^2 + MB^2 + MC^2$. Заменяя квадраты расстояний MA , MB , MC скалярными квадратами векторов \overline{MA} , \overline{MB} , \overline{MC} , получим:

$$\begin{aligned} \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 &= (\overline{MG} + \overline{GA})^2 + (\overline{MG} + \overline{GB})^2 + (\overline{MG} + \overline{GC})^2 = \overline{MG}^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GA} + \overline{GA}^2 + \overline{MG}^2 + \\ &+ 2\overline{MG} \cdot \overline{GB} + \overline{GB}^2 + \overline{MG}^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GC} + \overline{GC}^2 = \\ &= 3\overline{MG}^2 + 2\overline{MG} \cdot (\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}) + \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 = 3\overline{MG}^2 + \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2, \end{aligned}$$

поскольку $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$.

Итак,

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 3\overline{MG}^2 + \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \geq, \\ GA^2 + GB^2 + GC^2$$

причем равенство достигается только в случае совпадения точки M с центроидом треугольника ABC , поэтому центроид G минимизирует сумму $MA^2 + MB^2 + MC^2$. Для демонстрации аналитического способа решения задачи введем систему координат, в которой точки A , B , C , M будут иметь координаты $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, $M(x; y)$ (рис. 3).

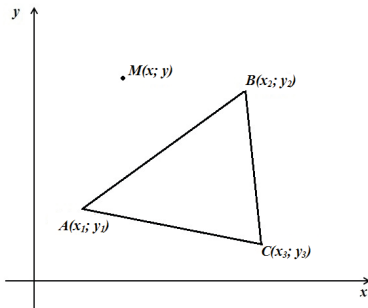


Рис. 3.

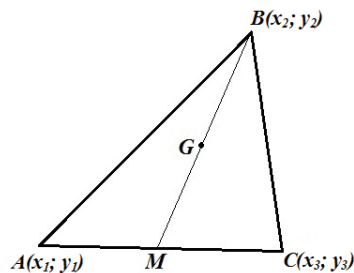


Рис. 4.

Применив формулу расстояния между двумя точками, имеем:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 +$$



$+(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = f(x, y)$. Приравнявая нулю частные производные функции $f(x, y)$, получим:

$$f'_x = 2(x - x_1 + x - x_2 + x - x_3) = 2(3x - x_1 - x_2 - x_3) = 0,$$

$$f'_y = 2(y - y_1 + y - y_2 + y - y_3) = 2(3y - y_1 - y_2 - y_3) = 0$$

$$\text{откуда } x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3).$$

Убедимся в том, что полученные формулы задают координаты центра тяжести треугольника ABC. В самом деле, пусть M – середина отрезка AC, $G(x; y)$ – центр тяжести треугольника ABC (рис. 4). Тогда $M\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_3); \frac{1}{2}(y_1 + y_3)\right)$ и $\overline{BC} = 2\overline{GM}$ или $(x - x_2, y - y_2) = 2\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_3) - x; \frac{1}{2}(y_1 + y_3) - y\right) = (x_1 + x_3 - 2x, y_1 + y_3 - 2y)$,

$$\text{откуда } x - x_2 = x_1 + x_3 - 2x, x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3),$$

$$y - y_2 = y_1 + y_3 - 2y, y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \text{ что и требовалось.}$$

Заметим, что если геометрическое решение данной задачи доступно старшеклассникам и может рассматриваться в качестве пропедевтики решения экстремальных задач, то для понимания аналитического решения необходимо знание основ математического анализа, изучаемого на младших курсах ВУЗов соответствующего профиля.

Перейдем теперь к рассмотрению пространственного варианта нашей задачи.

Задача 2. Найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин тетраэдра минимальна.

Попробуем решить эту задачу аналогично решению задачи 1. Если обозначить через ABCD данный тетраэдр, то сначала надо найти точку M такую, что $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \vec{0}$.

Утверждение 1. Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней, пересекаются в одной точке G и делятся этой точкой в отношении 3:1, считая от вершины тетраэдра. Эти отрезки называются медианами тетраэдра, а точка G называется центроидом тетраэдра.

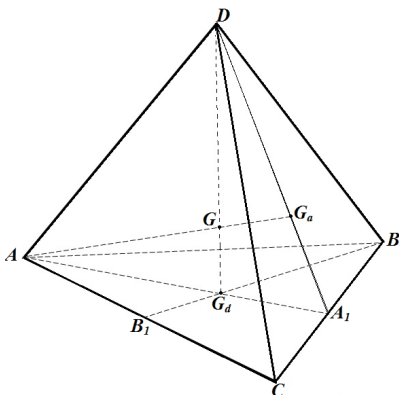


Рис. 5.

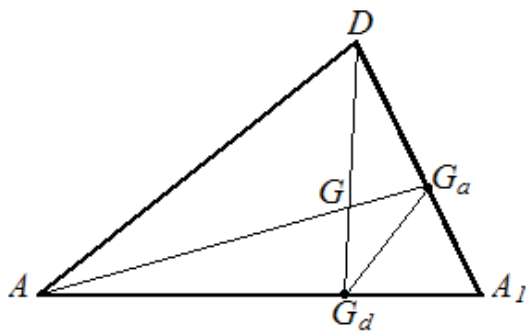


Рис. 6.



Доказательство. Пусть G_a и G_d – центры тяжести граней BCD и ABC соответственно, G – точка пересечения отрезков AG_a и DG_d (рис. 5). Тогда $G_aG_d \parallel AD$, откуда $\Delta AGD \sim \Delta G_aGG_d$ и $\frac{AG}{GG_a} = \frac{DG}{GG_d} = \frac{AD}{G_aG_d} = 3$ (рис. 6), поскольку $\frac{DG_a}{G_aA_1} = \frac{AG_d}{G_dA_1} = 2$.

Очевидно, что отрезки BG_b и CG_c , где G_b и G_c – центры тяжести граней ACD и ABD, также делят отрезок DG_d в отношении 3:1, считая от точки D и, таким образом, пересекаются в точке G. Покажем теперь, что $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Так как $\overrightarrow{DG} = 3\overrightarrow{GG_d}$, то для этого достаточно показать, что $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GG_d}$.

Сложим векторы \overrightarrow{GA} , \overrightarrow{GB} , \overrightarrow{GC} по правилу параллелепипеда: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GE_2}$ (рис. 7). Поскольку диагональ GE_2 параллелепипеда лежит в каждой из плоскостей GEE_2C , GA_2E_2B , GB_2E_2A диагональных сечений параллелепипеда, то прямая GE_2 пересекает плоскость ABC в точке пересечения медиан треугольника ABC, т.е. в центре тяжести G_d . Пусть G'_a – точка пересечения плоскости, проходящей через точку G_d параллельно грани GBB_2C , с ребром GA параллелепипеда, M_a – середина ребра GA. Точки G'_b и G'_c определим аналогично точке G'_a . Тогда

$$\overrightarrow{GG'_a} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GM_a} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GA}. \text{ Аналогично, } \overrightarrow{GG'_b} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GG'_c} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GC}.$$

По правилу параллелепипеда $\overrightarrow{GG'_a} + \overrightarrow{GG'_b} + \overrightarrow{GG'_c} = \overrightarrow{GG_d}$, поэтому $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3(\overrightarrow{GG'_a} + \overrightarrow{GG'_b} + \overrightarrow{GG'_c}) = 3\overrightarrow{GG_d}$, что и требовалось доказать.

Наконец-то мы можем по аналогии с решением задачи 1 завершить решение задачи 2:

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = (\overline{MG} + \overline{GA})^2 + \\ &+ (\overline{MG} + \overline{GB})^2 + (\overline{MG} + \overline{GC})^2 + (\overline{MG} + \overline{GD})^2 = 4\overline{MG}^2 + 2\overline{MG} \cdot (\overline{GA} + \overline{GB} + \\ &+ \overline{GC} + \overline{GD}) + \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + \overline{GD}^2 = 4\overline{MG}^2 + \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + \overline{GD}^2 \geq \\ &\overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + \overline{GD}^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2. \end{aligned}$$

Итак, $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$, причем равенство достигается только в случае совпадения точки M с точкой G, т.е. центр тяжести G тетраэдра ABCD минимизирует сумму квадратов расстояний $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ от точки M до его вершин A, B, C, D.

Пусть точки M, A, B, C, D имеют следующие координаты: $M(x; y; z)$, $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$. Тогда сумма квадратов расстояний от точки M до вершин тетраэдра ABCD запишется следующим образом: $g(x, y, z) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 + (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2$. Приравняв нулю частные производные функции $g(x; y; z)$, получим:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}.$$

Рассуждая по аналогии с плоским случаем, можно показать, что точка с такими координатами совпадает с центром тяжести G тетраэдра ABCD.

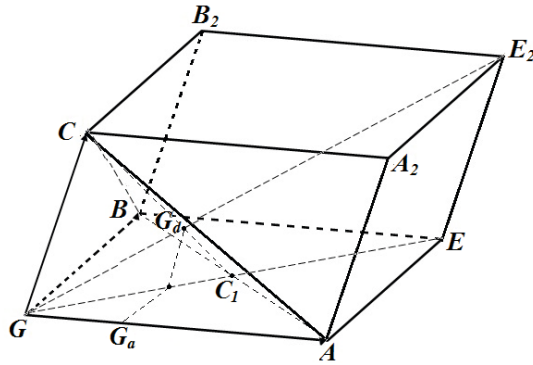


Рис. 7.

Перейдем к рассмотрению следующей задачи, в некотором смысле двойственной задаче 1.

Задача 3. В плоскости треугольника найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до прямых, содержащих стороны треугольника, минимальна.

Решение. Опустим из точки M перпендикуляры $\overline{MA_1}$, $\overline{MB_1}$, $\overline{MC_1}$ на прямые BC , CA , AB соответственно и обозначим $\overline{MA_1} = \bar{x}$, $MA_1 = x$, $\overline{MB_1} = \bar{y}$, $MB_1 = y$, $\overline{MC_1} = \bar{z}$, $MC_1 = z$ (рис. 8).

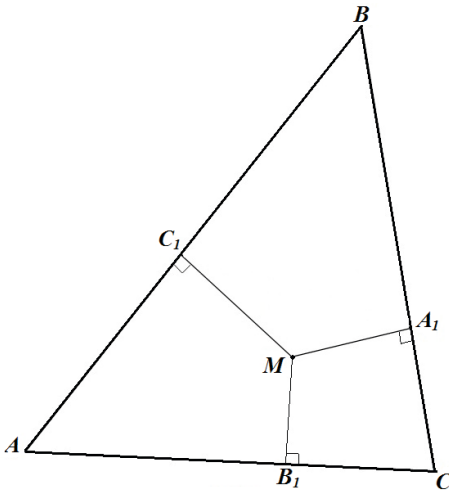


Рис. 8.

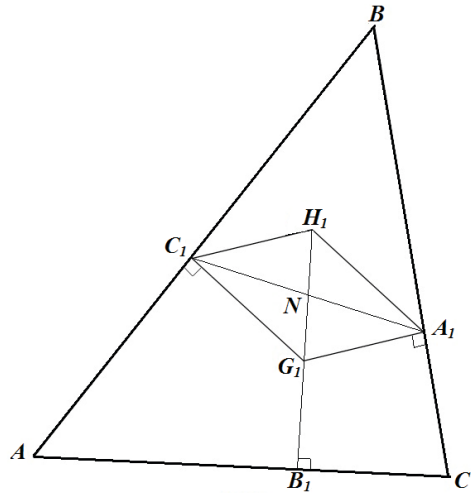


Рис. 9.

$$\text{Тогда } MA_1^2 + MB_1^2 + MC_1^2 = \overline{MA_1}^2 + \overline{MB_1}^2 + \overline{MC_1}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 =$$

$$(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})^2 - 2\bar{x}\bar{y} - 2\bar{y}\bar{z} - 2\bar{z}\bar{x} \geq -2(\bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{z} + \bar{z}\bar{x}), \text{ причем равенство}$$

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = -2(\bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{z} + \bar{z}\bar{x}) \text{ достигается в том и только в том случае, когда}$$

$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = 0$, т.е. в случае, когда M совпадает с центроидом G_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Установим расположение точки G_1 по отношению к треугольнику ABC . Пусть $H_1 -$

точка, симметричная G_1 относительно середины N отрезка A_1C_1 (рис. 9). Тогда четырехугольник $A_1H_1C_1G_1$ – параллелограмм, причем $G_1A_1 \perp BC$, $A_1H_1 \perp AB$, $H_1G_1 \perp AC$, поскольку $A_1H_1 \parallel G_1C_1$, а отрезок H_1G_1 лежит на прямой G_1B_1 , перпендикулярной AC . Тогда стороны треугольника $G_1A_1H_1$ перпендикулярны сторонам треугольника ABC , откуда следует, что углы этих треугольников равны, и, таким образом, $\triangle H_1A_1G_1 \sim \triangle ABC$, откуда получаем:

$$\frac{A_1G_1}{BC} = \frac{G_1H_1}{CA} = \frac{H_1A_1}{AB} = k, \text{ или } A_1G_1 = ka, G_1H_1 = kb, H_1A_1 = kc,$$

где a, b, c – длины сторон BC, CA, AB треугольника ABC .

Но $G_1H_1 = 2G_1N = G_1B_1$, так как G_1 – точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.

Итак, $G_1A_1 = ka$, $G_1B_1 = kb$, $G_1C_1 = kc$, т.е. расстояния от точки G_1 до сторон треугольника ABC пропорциональны длинам соответствующих сторон этого треугольника.

Заметим, что, так как центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с серединой отрезка G_1B ($\angle G_1A_1B = \angle G_1C_1B = 90^\circ$), а H_1 – ортоцентр этого треугольника ($A_1H_1 \perp AB, H_1C_1 \perp BC$), то $\angle G_1BA_1 = \angle H_1BC_1$ (рис. 10), т.е. прямые G_1B и H_1B изогональны (см. [1], [2]).

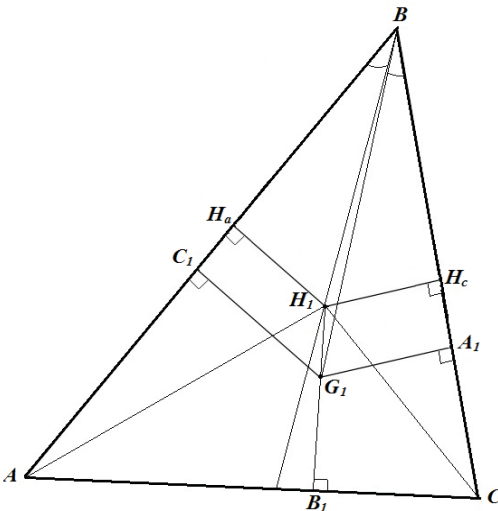


Рис. 10.

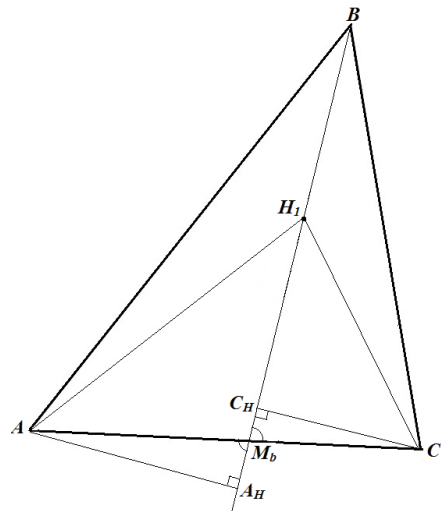


Рис. 11.

Рассмотрим отношение площадей треугольников AH_1B и CH_1B :

$$\frac{S_{AH_1B}}{S_{CH_1B}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot H_1H_c}{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot H_1H_a} = \frac{c}{a} \cdot \frac{H_1H_c}{H_1H_a} = \frac{c}{a} \cdot \frac{C_1H_1 \cos B}{A_1H_1 \cos B} = \frac{c}{a} \cdot \frac{G_1A_1}{G_1C_1} = \frac{c}{a} \cdot \frac{ka}{kc} = 1.$$

Через точки A и C проведем перпендикуляры AA_n и CC_n к прямой BH_1 (рис. 11).

Тогда $S_{AH_1B} = \frac{1}{2}BH_1 \cdot AA_n = \frac{1}{2}BH_1 \cdot CC_n = S_{CH_1B}$, откуда $AA_n = CC_n$ и из равен-



ства прямоугольных треугольников $AA_H M_b$ и $CC_H M_b$, выводим, что прямая BH_1 пересекает сторону AC в ее середине M_b , т.е. точка H_1 лежит на медиане BM_b треугольника ABC .

Другими словами, прямая BG_1 изогональна медиане BM_b треугольника ABC . Совершенно аналогично можно установить, что прямые AG_1 и CG_1 изогональны медианам AM_a и CM_c соответственно. Таким образом, точка G_1 изогонально сопряжена центроиду G треугольника ABC . Эта точка называется точкой Лемуана в честь французского математика Эмиля Лемуана (1840–1912), опубликовавшего в 1873 г. доказательство существования этой точки и обозначается буквой L (также широко распространено обозначение K).

Заметим, что до Лемуана в 1847 г. эту точку исследовал немецкий математик Греббе (1804–1874), а еще раньше, в 1809 г., французский математик Люилье (1750–1840) открыл только что рассмотренное свойство этой точки [4]. Так что в контексте нашей задачи логичней было бы называть точку Лемуана точкой Люилье. В дальнейшем мы увидим, что аналогичная точка в пространстве называется точкой Люилье, т.е. в пространственном варианте рассмотренной задачи историческая справедливость все-таки восторжествовала.

На самом деле, определить положение точки L легче всего с помощью следующего утверждения, называемого теоремой Шлемильха.

Утверждение 2. Три прямые, проходящие через середины сторон треугольника и середины, проведенных к ним высот, пересекаются в точке Лемуана этого треугольника.

Доказательство. В решении задачи 3 было показано, что точка H_1 , симметричная точке L (на рис. 9 точка L обозначена как G_1) относительно середины N отрезка $A_1 D_1$, лежит на медиане BM_b треугольника ABC (рис. 12). Так как L – точка пересечения медиан треугольника $A_1 B_1 C_1$, то $B_1 L = 2LN = LH_1$, т.е. L совпадает с серединой отрезка $B_1 H_1$, но при гомотетии с центром в M_b , переводящей H_1 в B , точка L переходит в середину S_b высоты BH_b . Точно так же можно показать, что отрезки $M_a S_a$ и $M_c S_c$, где M_a и M_c – середины сторон BC и BA , а S_a и S_c – середины высот AH_a и CH_c , проходят через точку Лемуана L .

Вернемся однако к задаче 3. Обозначим, как и раньше, расстояния от точки M до сторон BC , CA , AB треугольника ABC через x , y , z соответственно (рис. 13.).

Рассмотрим выражение

$$(x - ka)^2 + (y - kb)^2 + (z - kc)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2k(ax + by + cz) + k^2(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x - ka)^2 + (y - kb)^2 + (z - kc)^2 + 2k(ax + by + cz) - k^2(a^2 + b^2 + c^2) \geq$$

$$2k(ax + by + cz) - k^2(x^2 + y^2 + z^2), \text{ причем равенство достигается только при } x = ka, y = kb, z = kc.$$

Коэффициент k находится из равенства площадей:

$$S_{BMC} + S_{CMA} + S_{AMB} = S_{ABC} \text{ или } \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}by + \frac{1}{2}cz = S, \\ ax + by + cz = 2S, \tag{1}$$

$k(a^2 + b^2 + c^2) = 2S, k = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}$. Ясно, что полученная точка совпадает с точкой Лемуана L .

Однако, приведенное решение, безупречное с математической точки зрения, все же педагогически ущербно, поскольку оно использует предположение о пропорци-

ональности расстояний от искомой точки соответствующим сторонам треугольника без всяких объяснений того, откуда взялось это предположение.

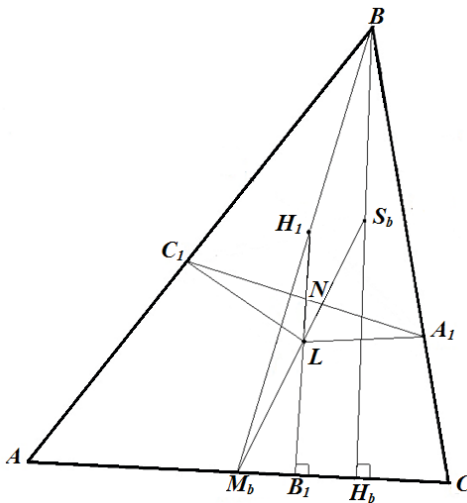


Рис. 12.

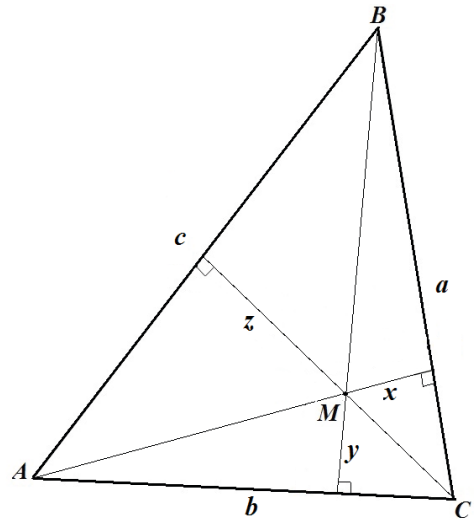


Рис. 13.

Приведем еще одно решение, использующее метод множителей Лагранжа. Запишем целевую функцию $u(x, y, z)$ нашей задачи и добавим к ней уравнение связи (1). Получим следующую формализацию задачи:

$$u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \min$$

$$ax + by + cz = 2S, \text{ или } ax + by + cz - 2S = 0.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, z) = u(x, y, z) + \lambda(ax + by + cz - 2S) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(ax + by + cz - 2S).$$

Теперь приравняем нулю частные производные функции Лагранжа:

$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_z = 0, \end{cases} \begin{cases} 2x + \lambda a = 0, \\ 2y + \lambda b = 0, \\ 2z + \lambda c = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Выразив $-\frac{\lambda}{2}$ из уравнений (2), получим:

$$-\frac{\lambda}{2} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k, \text{ откуда } x = ka, y = kb, z = kc.$$

где k находится из уравнения связи (1) после подстановки в него значений $x = ka, y = kb, z = kc$: $a \cdot ka + b \cdot kb + c \cdot kc = 2S$;

$$k(a^2 + b^2 + c^2) = 2S, \quad k = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Естественно, что приведенное аналитическое решение дает тот же результат, что и предыдущее решения.

Осталось рассмотреть пространственный вариант задачи 3.



Задача 4. Найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до плоскостей, содержащих грани данного тетраэдра, минимальна.

Прежде чем приступить к решению задачи 4, давайте еще раз проанализируем решение задачи 3. Введем векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC: $\vec{a} = \overline{BC}, \vec{b} = \overline{CA}, \vec{c} = \overline{AB}$ (рис. 14 а). Тогда $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} = \vec{0}$. После поворота треугольника ABC на 90° по часовой стрелке он примет положение $A_1B_1C_1$ стороны которого перпендикулярны сторонам треугольника ABC (рис. 14 б).

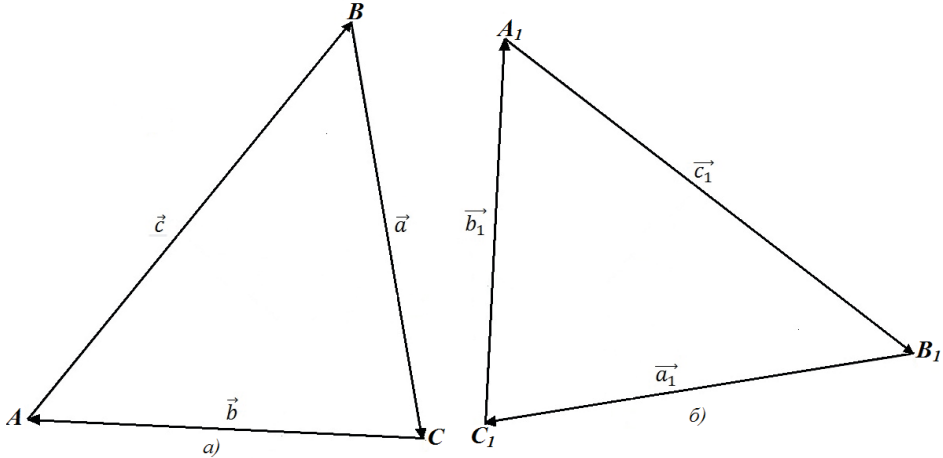


Рис. 14.

Естественно, что при этом сохраняется равенство $\vec{a}_1 + \vec{b}_1 + \vec{c}_1 = \vec{0}$ (2). Отложим векторы $\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1$ от точки Лемуана L треугольника ABC (рис. 15 а) и сделаем гомотегию с центром L и коэффициентом $k = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}$ (рис. 15 б).

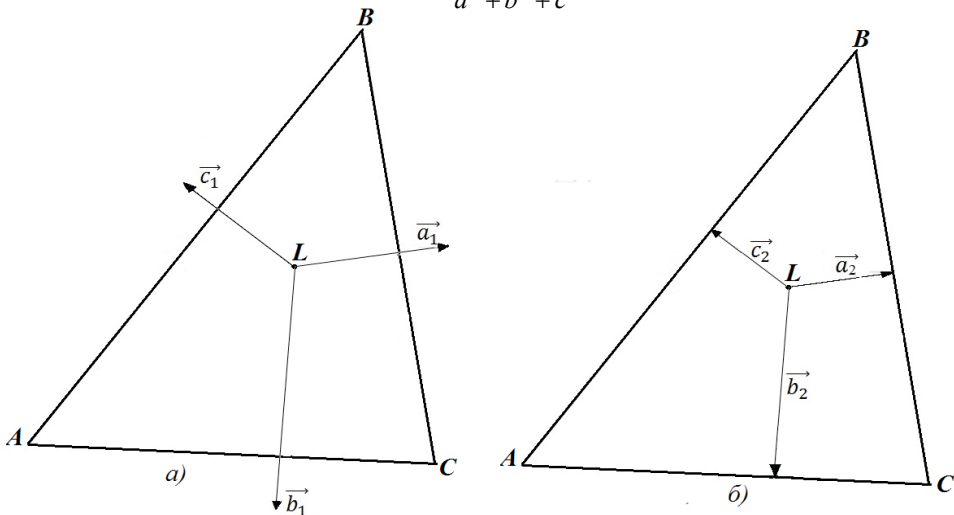


Рис. 15.



Умножив равенство (2) на коэффициент гомотетии $k = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}$ получим $k\vec{a}_1 + k\vec{b}_1 + k\vec{c}_1 = \vec{0}$ или $\vec{a}_2 + \vec{b}_2 + \vec{c}_2 = \vec{0}$, где $\vec{a}_2 = k\vec{a}_1$, $\vec{b}_2 = k\vec{b}_1$, $\vec{c}_2 = k\vec{c}_1$.

Проводя рассуждения в обратном порядке, получим, что если расстояния от некоторой точки до стороны треугольника пропорциональны сторонам этого треугольника, то эта точка является центроидом своего треугольника проекций, поскольку сумма векторов, проведенных из этой точки в вершины треугольника проекций, равна нулю. Фактически, мы еще раз доказали характеристическое свойство точки Лемуана: сумма квадратов расстояний от точки до прямых, содержащих стороны треугольника, минимальна тогда и только тогда, когда эта точка совпадает с центроидом своего треугольника проекций.

Попробуем реализовать намеченную программу для решения задачи 4. Аналогом длин сторон треугольника являются площади граней тетраэдра. Значит, вместо векторов, перпендикулярных сторонам треугольника, модули которых равны этим сторонам, надо рассмотреть векторы, перпендикулярные его граням, с модулями, равными площадям этих граней.

Утверждение 3. Пусть векторы $\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{n}_c, \vec{n}_d$ перпендикулярны соответственно граням BCD, CDA, DAB, BAC тетраэдра ABCD, направлены в его внешнюю область и имеют модули, равные площадям соответствующих граней тетраэдра. Тогда $\vec{n}_a + \vec{n}_b + \vec{n}_c + \vec{n}_d = \vec{0}$.

Доказательство. Обозначим $\vec{DA} = \vec{a}, \vec{DB} = \vec{b}, \vec{DC} = \vec{c}$ и пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку как на рис. 16.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \vec{n}_1 &= \frac{1}{2} \vec{c} \times \vec{b}, \vec{n}_2 = \frac{1}{2} \vec{a} \times \vec{c}, \vec{n}_3 = \frac{1}{2} \vec{b} \times \vec{a}, \vec{n}_4 = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \\ &= \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{2} (\vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{a}) = \frac{1}{2} (\vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a}), \text{ и} \\ \vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4 &= \frac{1}{2} (\vec{c} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{c} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a}) = \vec{0}, \text{ что и требовалось.} \end{aligned}$$

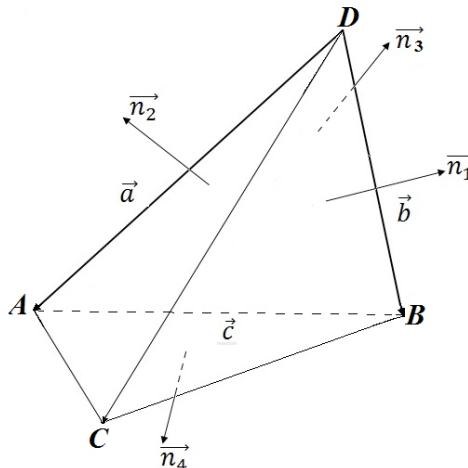


Рис. 16.



Как уже говорилось выше, точка, минимизирующая сумму квадратов расстояний от нее до плоскостей граней данного тетраэдра, называется точкой Люилье L этого тетраэдра.

Утверждение 4. Точка Люилье тетраэдра $ABCD$ совпадает с центроидом ее тетраэдра проекций $L_a L_b L_c L_d$ относительно тетраэдра $ABCD$.

Доказательство. Пусть L_a, L_b, L_c, L_d – проекции точки L , M_a, M_b, M_c, M_d – проекции точки M соответственно на плоскости BCD, CDA, DAB, ABC соответственно. Тогда $LL_a^2 + LL_b^2 + LL_c^2 + LL_d^2 \leq MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 + MM_d^2 \leq ML_a^2 + ML_b^2 + ML_c^2 + ML_d^2$, причем равенство возможно только в случае совпадения точек L и M , т.е. точка L минимизирует сумму квадратов расстояний от точки M до вершин тетраэдра $ABCD$ и поэтому согласно задаче 2 совпадает с центроидом тетраэдра $L_a L_b L_c L_d$, т.е. $\overline{LL_a} + \overline{LL_b} + \overline{LL_c} + \overline{LL_d} = \vec{0}$. Поскольку точка L определяется единственным образом и $\overline{LL_a} + \overline{LL_b} + \overline{LL_c} + \overline{LL_d} = \vec{0}$, $\overline{n_a} + \overline{n_b} + \overline{n_c} + \overline{n_d} = \vec{0}$, то расстояния LL_a, LL_b, LL_c, LL_d пропорциональны модулям векторов n_a, n_b, n_c, n_d , т.е. площадям S_a, S_b, S_c, S_d граней BCD, CDA, DAB, BAC тетраэдра $ABCD$. Обозначив высоты тетраэдров $LBCD, LCDA, LDAB, LBAC$ через $x = LL_a, y = LL_b, z = LL_c, t = LL_d$, найдем коэффициент пропорциональности k : $V_{LBCD} + V_{LCDA} + V_{LDAB} + V_{LBAC} = V_{ABCD}$

$$\frac{1}{3} S_a x + \frac{1}{3} S_b y + \frac{1}{3} S_c z + \frac{1}{3} S_d t = V,$$

$$S_a \cdot k S_a + S_b \cdot k S_b + S_c \cdot k S_c + S_d \cdot k S_d = 3V,$$

$$k (S_a^2 + S_b^2 + S_c^2 + S_d^2) = 3V, \quad k = \frac{3V}{S_a^2 + S_b^2 + S_c^2 + S_d^2}.$$

Установить пропорциональность расстояний от точки Люилье до плоскостей граней тетраэдра площадям этих граней можно также следующим способом (плоский случай см. в [5]). Нам нужно найти минимум функции $u(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, где переменные x, y, z, t удовлетворяют следующему уравнению связи:

$$S_a x + S_b y + S_c z + S_d t - 3V = 0 \quad (3)$$

Целевая функция представляет собой квадрат расстояния от начала координат $O(0, 0, 0, 0)$ до точки $M(x, y, z, t)$, лежащей в плоскости (3) четырехмерного пространства. Понятно поэтому, что расстояние от точки O до плоскости (3) равно модулю вектора \overline{OH} , коллинеарного нормальному вектору $\vec{n}(S_a, S_b, S_c, S_d)$ плоскости (3), т.е. $x = k S_a, y = k S_b, z = k S_c, t = k S_d$.

Подставив эти значения x, y, z, t в уравнение (3) найдем коэффициент k :

$$k = \frac{3V}{S_a^2 + S_b^2 + S_c^2 + S_d^2}.$$

И, наконец, решим задачу 4 методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа для данной задачи имеет вид $L(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + \lambda g(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + \lambda(S_a x + S_b y + S_c z + S_d t - 3V)$. Приравнявая нулю частные производные функции Лагранжа, получим:

$$2x + \lambda S_a = 0, 2y + \lambda S_b = 0, 2z + \lambda S_c = 0, 2t + \lambda S_d = 0, \text{ откуда}$$

$$-\frac{\lambda}{2} = \frac{x}{S_a} = \frac{y}{S_b} = \frac{z}{S_c} = \frac{t}{S_d} = k,$$

т.е. $x = kS_a, y = kS_b, z = kS_c, t = kS_d$, где $k = \frac{3V}{S_a^2 + S_b^2 + S_c^2 + S_d^2}$. Очевидно, что найденная точка совпадает с найденной ранее точкой Люилье.

3. ПОЛЯ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ ТОЧКАМИ И ПРЯМЫМИ

Зададим на плоскости декартову систему координат. Расстояние z между точками $M(x_0; y_0)$ и $N(x; y)$ удовлетворяет уравнению $z^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. Если зафиксировать точку M , то будет индуцировано поле, графическое представление которого является конусом (рис.17).

Пусть прямая L перпендикулярна единичному вектору $(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ и проходит через точку $A(x_1; y_1)$. Нормальное уравнение прямой имеет вид $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_1) = 0$.

Если $N(x; y)$ ещё одна точка на плоскости, то расстояние от прямой L до точки N равно значению величины $z = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_1)$. Расстояние берётся со знаком, зависящим от того, в какой из полуплоскостей находится точка N . Отметим, что вектор, ортогональный к плоскости $z = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_1)$ имеет координаты $(\mathbf{a}; \mathbf{b}; -1)$.

Сразу отметим, что в случае, когда рассматривается несколько прямых, линейная комбинация индуцируемых ими полей является линейной формой, в частности суперпозицией полей. В частности в статье [6] доказывается следующая теорема: линии стока суммы расстояний до сторон треугольника ABC параллельны прямой OI , где O и I – центры описанной и вписанной окружностей соответственно.

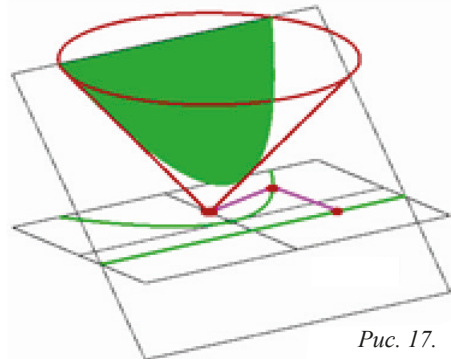


Рис. 17.

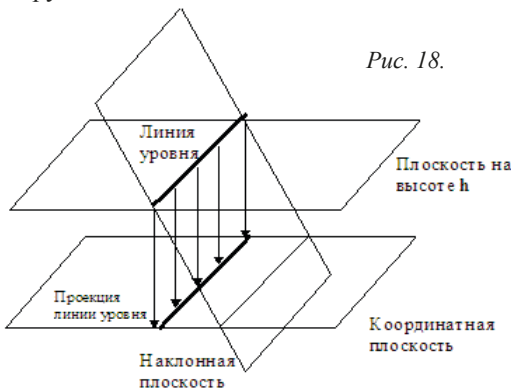


Рис. 18.

Поскольку данная теорема имеет очевидные связи с экстремальными задачами, приведём её доказательство.

Изложение ведётся в предположении, что учащемуся известны азы векторной алгебры, включая скалярное произведение на плоскости и в пространстве.

Если из точки $(x_0; y_0; z_0)$ исходит базовый вектор $(\mathbf{a}_1; \mathbf{b}_1; \mathbf{c}_1)$, то концы всех перпендикулярных ему векторов с началом в $(x_0; y_0; z_0)$ замечают пер-



пендикулярную ему плоскость. Условие перпендикулярности векторов $(a_1; b_1; c_1)$ и $(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ состоит в равенстве нулю их скалярного произведения, т.е. имеет вид $a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) + c_1(z - z_0) = 0$ или, после приведения свободных членов, $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$. В результате получен общий вид уравнения плоскости, расположенной в трёхмерном пространстве.

Обе части уравнения $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ можно умножить на число $-1/c_1$ (если c_1 не равно 0). В результате уравнение плоскости преобразуется к виду $z = ax + by + d$, а базовый вектор $(a_1; b_1; c_1)$ переходит в вектор $(a; b; -1)$, где $a = -a_1/c_1$, $b = -b_1/c_1$, $d = -d_1/c_1$. Это явное выражение величины z как функции от двух переменных. Если положить $z = \text{const}$, то будут получены линии уровня, которые являются параллельными между собой прямыми. Перпендикулярные им прямые можно назвать линиями стока, поскольку именно по этому направлению наиболее быстро убывает или возрастает функция z .

Проекцией базового вектора $(a; b; -1)$ на плоскость xOy является вектор $(a; b)$. Он указывает направление проекций линий стока на ту же плоскость. Поскольку точка $(x_0; y_0; z_0)$ лежит на плоскости $z = ax + by + d$, верно равенство $z_0 = ax_0 + by_0 + d$. Сдвинемся из точки $(x_0; y_0)$, придав аргументам приращения Δx и Δy . Тогда $z + \Delta z = a(x + \Delta x) + b(y + \Delta y) + d$. Отсюда вытекает, что приращение функции $\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$, т.е. скалярному произведению векторов $(a; b)$ и $(\Delta x; \Delta y)$.

Каждая прямая на плоскости индуцирует поле расстояний до неё. Если в одной полуплоскости брать расстояние до прямой со знаком плюс, а в другой – со знаком минус, то графиком поля будет плоскость, наклонённая к исходной под углом 45° . Её линии уровня параллельны исходной прямой, а линии стока (градиента) ей перпендикулярны. Их направление можно задать единичным вектором $(a; b)$, перпендикулярным исходной прямой. Уравнение поля примет вид $z = ax + by$. Отметим, что выбор поля неоднозначен, т.к. знаки в полуплоскостях можно поменять.

Расстояние до сторон треугольника есть суперпозиция трёх скалярных полей, а её графическое представление тоже плоскость. Возможны несколько вариантов выбора исходных полей, но мы остановимся на том, при котором внутри треугольника все поля положительны. Рассмотрение других вариантов приводит к внеписанным окружностям.

Вектор линии стока суперпозиции равен сумме векторов трёх исходных полей. Действительно, пусть даны три поля $z = a_i x + b_i y$ ($i = 1, 2, 3$). Их суперпозиция имеет уравнение $z = (a_1 + a_2 + a_3)x + (b_1 + b_2 + b_3)y$, что и соответствует суммированию векторов градиента.

Теорема. Сумма векторов OA_1 , OB_1 и OC_1 (рис. 19) равна вектору OI , где O и I – центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно. Иными словами линии стока суммы расстояний до сторон треугольника ABC параллельны прямой OI .

Доказательство теоремы является весьма простым (рис. 20). Сумма векторов OC_1 и OA_1 параллельна биссектрисе BB_1 , поскольку A_1OC_1 и ABC – углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Следовательно, конец вектора равного сумме всех трёх

векторов OA_1 , OB_1 и OC_1 , найденный по правилу параллелограмма, лежит на этой биссектрисе. Но если начать с векторов OA_1 и OB_1 , то конец этого же вектора, лежит на биссектрисе CC_1 . Из этого следует, что конец вектора равного сумме всех трёх векторов OA_1 , OB_1 и OC_1 есть точка пересечения биссектрис. Отметим, что векторы OA_1 , OB_1 и OC_1 имеют длину R , поэтому для получения функции, реализующей именно расстояние, необходимо умножить каждый из этих векторов на число $1/R$.

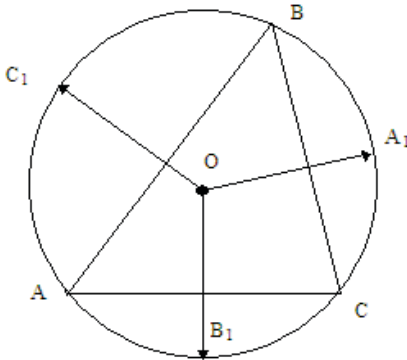


Рис. 19.

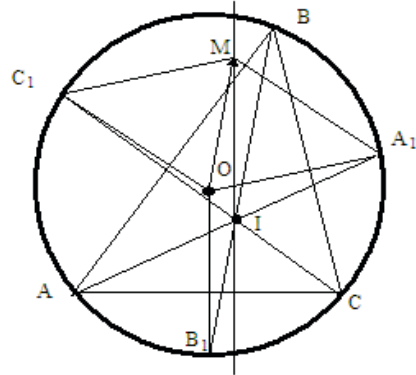


Рис. 20.

Теорема позволяет вписать в окружность треугольник с заданными направлениями сторон. Для этого нужно построить вектора OA_1 , OB_1 и OC_1 , сложить их (найти точку пересечения биссектрис I) и, проведя биссектрисы IA_1 , IB_1 и IC_1 найти вершины треугольника.

Значение поля z_0 в точке O равно $R(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$, где R – радиус описанной окружности, а α , β и γ – углы треугольника, может быть вычислено с помощью скалярного квадрата вектора OI . Пусть $|OI| = d$, тогда согласно пункту 3 оба вектора $(a; b)$ и $(\Delta x; \Delta y)$ равны OI . $OI^2 = d^2 = (OA_1 + OB_1 + OC_1)^2 = 3R^2 - 2R^2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$. Окончательно, $z_0 = (3R^2 - d^2) / 2R$.

Вдоль вектора OI поле убывает на d^2 / R . Следовательно, значение поля в точке I равно $3r = (3R^2 - 3d^2) / 2R$, где r – радиус вписанной окружности, т.е. $r = (R^2 - d^2) / 2R$.

Рассмотрим окружность ω_1 радиуса R с центром O и впишем в неё треугольник $A_0B_0C_0$. В него в свою очередь впишем окружность ω_2 с центром I и радиусом r . Расстояние OI обозначим через d . На окружности ω_1 выберем произвольную точку A . После этого на той же окружности ω_1 легко найти точки B и C , такие, что сумма векторов OA , OB и OC равна OI . Окружность, вписанная в треугольник ABC , по доказанному имеет центр в точке I . Кроме того, её радиус вычисляется однозначно по R и d , т.е. равен r . Итак, окружности, вписанные в треугольники ABC и $A_0B_0C_0$, совпадают.

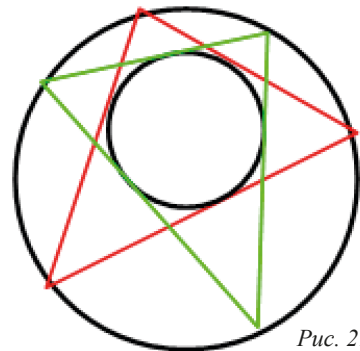


Рис. 21.



Мы получили частный случай поризмы Понселе [7]. Рассмотрим вписанную и описанную окружности некоторого треугольника. Взяв на первой из них произвольную точку А, проведём хорду АВ, касающуюся вписанной окружности, затем касающуюся её хорду ВС, а в заключении хорду CD. Тогда точки А и D совпадут (рис. 21).

4. КРИВЫЕ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ПОЛЯМИ НА ДЕКАРТОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрение двух или нескольких объектов, среди которых есть порождающие нелинейные поля, приводит к естественному появлению на плоскости различных кривых, прежде всего, кривых второго порядка.

Одно из определений параболы таково: геометрическое место точек равноудалённых от точки А и прямой L. Пусть точка А имеет координаты (0; 1), а прямая L – уравнение $y + 1 = 0$. Индуцированные ими поля описываются уравнениями: $z^2 = x^2 + (y - 1)^2$ и $z = y + 1$. Парабола является проекцией на координатную плоскость линии пересечения соответствующих поверхностей: $x^2 + (y - 1)^2 = (y + 1)^2$. Таким образом, одновременно получено уравнение параболы $y = \frac{1}{4}x^2$ и намечен путь для доказательства того, что парабола является коническим сечением.

Другие кривые второго порядка появляются, когда одно из полей индуцируется несколькими прямыми. Например, если рассмотреть поле индуцируемое двумя прямыми L_1 и L_2 , пересекающимися в точке $A(x_1; y_1)$ и ортогональными к единичным векторам $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$, то оно является суммой полей $z = a_1 \cdot (x - x_1) + b_1 \cdot (y - y_1)$ и $z = a_2 \cdot (x - x_1) + b_2 \cdot (y - y_1)$. Таким образом, это поле представляется плоскостью $z = (a_1 + a_2) \cdot (x - x_1) + (b_1 + b_2) \cdot (y - y_1)$. Легко понять, что линии стока и линии уровня параллельны биссектрисам углов, образованных прямыми L_1 и L_2 (рис. 22).

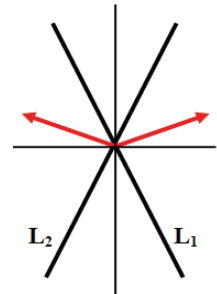


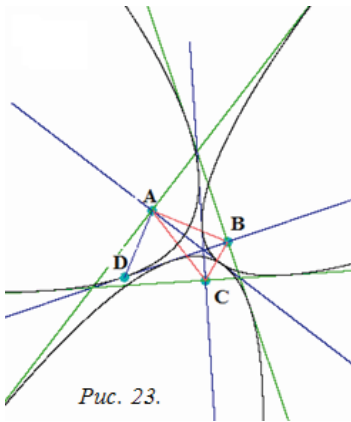
Рис. 22.

Определим вид геометрического места точек $N(x; y)$ таких, что расстояние MN до точки $M(x_0; y_0)$ равно сумме расстояний от N до прямых L_1 и L_2 . Положим, что $x_0 = 0$ и $y_0 = 1$. Кроме того, пусть уравнения прямых L_1 и L_2 имеют вид $y = k \cdot x$ и $y = -k \cdot x$, или в нормальном виде $\pm \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}} x - \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} y = 0$.

Индуцированное точкой M поле задаётся уравнением $z^2 = x^2 + (y - 1)^2$. Индуцированное прямыми L_1 и L_2 поле описывается уравнением $z = -\frac{2}{\sqrt{k^2 + 1}} y$. Искомое геометрическое место точек является проекцией на координатную плоскость линии пересечения соответствующих поверхностей: $x^2 + (y - 1)^2 = \frac{4}{k^2 + 1} y^2$. После преобразований получаем уравнение $x^2 \pm p^2 y^2 - 2y + 1 = 0$, где $p^2 = \pm$, в зависимости от знака выражения. При $k = \sqrt{3}$ искомое геометрическое место точек является параболой. В противном случае уравнение приобретает либо вид $x^2 + (py - 1/p)^2 = 1/p^2 - 1$ (при $k > \sqrt{3}$,

когда $p^2 = \frac{k^2 - 3}{k^2 + 1}$), то есть описывает эллипс, либо вид $(py + 1/p)^2 - x^2 = 1 + 1/p^2$ (при $k < \sqrt{3}$, когда $p^2 = -\frac{k^2 - 3}{k^2 + 1}$), то есть описывает гиперболу.

Если рассмотреть с этих позиций треугольник – фигуру, связанную с множеством замечательных точек и прямых, то каждая пара объектов вида точка – прямая порождает параболу.



Прежде всего, естественно рассмотреть каждую из вершин треугольника и её противоположную сторону. В результате будут получены три параболы. Докажем, что в треугольнике ABC парабола, индуцированная вершиной A и противоположной ей стороной BC касается биссектрис треугольника, проходящих через вершины B и C (рис. 23).

Осью симметрии упомянутой параболы является высота треугольника, опущенная из вершины A на сторону BC. Очевидно, что биссектрисы внутренних углов треугольника, проходящие через вершины B и C, не параллельны оси симметрии параболы. Но для прямых, обладающих этим свойством, верно следу-

ющее утверждение: если прямая не параллельна оси симметрии параболы и имеет с ней единственную общую точку, то она касается данной параболы.

Все точки биссектрисы BD равноудалены от сторон треугольника AB и BC. Если из точки A восстановить к стороне AB перпендикуляр, то точка D его пересечения с биссектрисой BD – единственная точка этой биссектрисы равноудалённая от точки A и стороны BC. Итак, D единственная точка биссектрисы, лежащая на параболе. Таким образом, парабола и биссектриса касаются друг друга. Точно такие же рассуждения показывают, что параболы касаются не только биссектрис внутренних, но и внешних углов треугольника.

Из этого факта легко получить следующее утверждение: если треугольник ABC является правильным, то соответствующие параболы касаются друг друга в точках, лежащих на описанной окружности (рис. 24).

Поскольку для треугольника характерна группировка прямых по три: три стороны, три медианы, три высоты и т.д., возникают разнообразные возможности рассмотрения полей, индуцированных тремя прямыми и точкой. В качестве примера можно привести геометрическое место точек, среднее арифметическое расстояний от каждой из которых до сторон треугольника равно расстоянию до точки пересечения биссектрис.

Мы, однако, рассмотрим более сложную конструкцию. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. Выберем на плоскости произвольную точку M. Прямые AM, BM и CM называются чевианами. Чевианы, пересекающиеся в точке M, и точка O индуцируют два скалярных поля. Пересечение соответствующих поверхностей – плоскости и конуса, является кривой второго порядка, одна из полуосей



которой указывает направление убывания поля чевиан. Проекция соответствующей полуоси на плоскость треугольника ABC, рассматриваемая как вектор, может быть перенесена в точку M. Таким образом, каждой точке плоскости сопоставлен вектор, то есть получено векторное поле.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассматриваются различные подходы к решению экстремальных задач геометрического характера, в частности элементарно-геометрические методы. Кроме того, описывается подход, связанный с рассмотрением аналогов силовых полей, индуцируемых различными геометрическими фигурами. Объём статьи не позволил затронуть даже тот ряд вопросов, которые выявляют взаимосвязь упомянутых подходов. По этой причине авторы предполагают написание новой статьи, являющейся продолжением данной публикации.

Литература

1. Куланин Е.Д., Нуркаева И.М. О двух геометрических задачах на экстремум // Математика в школе. М., 2019. № 4. – С. 35–40.
2. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики. // Моделирование и анализ данных. 2019. № 4. – С. 127–144.
3. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Роль образного мышления в научном мышлении. // Моделирование и анализ данных. 2020. – Т. 10. – № 2, С.110–128.
4. Понарин Я.П. Элементарная геометрия: в 2 т. – т. 2: Стереометрия, преобразования пространства. – М.: МЦНМО, 2006.
5. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие. – 6-е изд., стереотипн. – М.: МЦНМО, 2007, С. 282–283.
6. Степанов М.Е. Образ силового поля как эвристическая модель в математике». Моделирование и анализ данных. Труды факультета информационных технологий МГППУ. – 2007, Вып. 3.
7. Прасолов В.В., Тихомиров В.М. Геометрия. – М.: МЦНМО, 1997.



On Different Approaches to Solving Extreme Problems

Yevgeny D. Kulanin*

Moscow state University of Psychology & Education, Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>

e-mail: lucas03@mail.ru

Irina M. Nurkaeva**

Moscow state University of Psychology & Education, Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1949-6734>

e-mail: nurkaevaim@yandex.ru

Mikhail E. Stepanov***

Moscow state University of Psychology & Education, Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>

e-mail: mestepanov@yandex.ru

The article discusses the geometric and analytical methods for solving known extreme problems and identifies the logical relationships between these problems, the preference for using one or another method for solving extreme problems is shown by specific examples.

Keywords: Extreme problems, Lemoine point, Lhuillier point, isogonality, centroid, Lagrange multiplier method, triangle, tetrahedron.

For citation:

Kulanin Y.D., Nurkaeva I.M., Stepanov M.E. On Different Approaches to Solving Extreme Problems. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 1, pp. 40–60. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110104> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. On two geometric problems on the extremum // *Mathematics in School. M.*, 2019. No. 4. – pp. 35–40.
2. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. Propaedeutics of solving extreme problems in the school course of mathematics. // *Data modeling and analysis*. 2019. No. 4. – pp. 127–144.

****Yevgeny D. Kulanin***, candidate of physical and mathematical Sciences, Professor, Moscow state University of Psychology & Education, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru

*****Irina M. Nurkaeva***, candidate of pedagogical Sciences, associate Professor, Moscow state University of Psychology & Education, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1949-6734>, e-mail: nurkaevaim@yandex.ru

******Mikhail E. Stepanov***, candidate of pedagogical Sciences, associate Professor, Moscow state University of Psychology & Education, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru



3. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. The role of figurative thinking in scientific thinking. // Data modeling and analysis. 2020. – vol. 10. – No. 2, pp. 110–128.
4. Ponarin Y.P. Elementary geometry: in 2 t. – T. 2: solid geometry, transform space. – M.: MCNMO, 2006.
5. Prasolov V.V. Problems of plane geometry: a tutorial. – 6th ed. stereotype. – M.: MCNMO, 2007. – pp. 282–283.
6. Stepanov M.E. The image of the force field as a heuristic model in mathematics”. Data modeling and analysis. Proceedings of the Faculty of Information Technologies of MSPPU. – 2007, Issue 3.
7. Prasolov V.V., Tikhomirov V.M. Geometry. MCNMO, 1997.

◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ **МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ** ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 378.147

**Образовательные результаты студентов
в электронных курсах при смешанном
и онлайн-обучении**

Сорокова М.Г. *

Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1000-6487>
e-mail: sorokovamg@mgppu.ru

Одинцова М.А. **

Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3106-4616>
e-mail: mari505@mail.ru

Радчикова Н.П. ***

Московский педагогический государственный университет (ФГБОУ ВО МПГУ),
Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002-5139-8288
e-mail: nataly.radchikova@gmail.com

Представлен сравнительный анализ образовательных результатов студентов, завершивших курсы по математическим методам в психологии при смешанном (N=404) и онлайн-обучении (N=405). Исследование проведено в Московском государственном психолого-педагогическом университете. Студенты онлайн-обучения показали в среднем более высокие результаты по сравнению с группой смешанного обучения по входному тесту, по итоговому тесту и по итоговой оценке за курс, однако разность в средних по всем трем показателям минимальна, а значимость различий обеспечивается большим объемом выборки. На меньшей выборке на этапе итогового тестирования и итоговой оценки за ЭУК значимых различий при смешанном и при онлайн обучении не выявлено. Предметные результаты студентов магистратуры и программ второго высшего образования, с одной стороны, и программ первого высшего – с другой, также практически одинаковы: различия по итоговому тесту и итоговой оценке за ЭУК находятся на грани статистической значимости, причем разность в средних минимальна и составляет лишь около одного процентного пункта. Динамика изменения средних значений по показателям академических



достижений в группах смешанного и онлайн обучения демонстрирует весьма выраженный – около 50 процентных пунктов – рост показателей итогового теста по сравнению с входным, а затем менее выраженный спад результатов через 1–1,5 месяца, которые все же остаются значимо выше входных. При этом в группе онлайн-обучения спад очень незначительный, то есть динамика лучше. Последний результат требует дальнейшей проверки при более уравненных условиях внешнего тестирования.

Ключевые слова: цифровая образовательная среда университета, электронный учебный курс, смешанной обучение, перевернутый класс, онлайн-обучение

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет» в рамках научно-исследовательского проекта «Цифровые технологии в высшем образовании: разработка технологии индивидуализации обучения средствами электронных учебных курсов».

Для цитаты:

Сорокова М.Г., Одинцова М.А., Радчикова Н.П. Образовательные результаты студентов в электронных курсах при смешанном и онлайн-обучении // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 1. С. 61–77. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110105>

***Сорокова Марина Геннадьевна**, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, руководитель Научно-практического центра по комплексному сопровождению психологических исследований PsyDATA, профессор кафедры Прикладной математики факультета Информационных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1000-6487>, e-mail: sorokovamg@mgppu.ru

****Одинцова Мария Антоновна**, кандидат психологических наук, заведующий кафедрой психологии и педагогики дистанционного обучения, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3106-4616>, e-mail: mari505@mail.ru

*****Радчикова Наталья Павловна**, кандидат психологических наук, доцент кафедры возрастной психологии факультета дошкольной педагогики и психологии Московского педагогического государственного университета (ФГБОУ ВО МПГУ); ведущий научный сотрудник Научно-практического центра по комплексному сопровождению психологических исследований PsyDATA, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: 0000-0002-5139-8288, e-mail: nataly.radchikova@gmail.com



1. ВВЕДЕНИЕ

В высшем образовании прослеживается значительный рост и расширение возможностей использования онлайн-технологий. Бурное развитие получили электронные учебные курсы (ЭУК), которые используются в нескольких форматах: в формате полностью самостоятельного изучения с просмотром видеолекций, выполнением заданий и т.д.; в онлайн-формате в вебинарных комнатах, где сохраняется онлайн-коммуникация с преподавателем и обучающимися; в гибридном формате, где у обучающихся есть возможность личного взаимодействия с сокурсниками и педагогами; в модели «перевернутый класс», реализуемой как при смешанном, так и при онлайн-обучении, и т.д. При этом ЭУК должен быть размещен на платформе-носителе – Learning Management System (LMS, система управления обучением).

Различные аспекты обучения в цифровых средах и оценки его результативности широко представлены и активно обсуждаются в зарубежных эмпирических исследованиях. В аналитическом обзоре [1] на материале зарубежной научной периодики показаны направления повышения эффективности онлайн-образования с точки зрения организации учебного процесса, способов повышения мотивации, работы с материалом и коммуникации его участников, а также технической стороны. Действительно, разнообразные форматы онлайн-обучения требуют критического анализа, выстроенного на эмпирических и экспериментальных исследованиях результативности их использования. Одним из критериев эффективности разных форм обучения становятся образовательные результаты студентов. Более того, считается, что результаты освоения курса могут быть показателем оценки общего качества программ онлайн-обучения [23].

В сравнительных исследованиях результативности обучения в традиционном формате (ТОО), с одной стороны, и смешанном или онлайн-формате, с другой, в целом, не подтверждается каких-либо преимуществ первого. Весьма примечателен также широкий спектр дисциплин, в которых новые цифровые форматы нашли применение. Исследование S. Gulsecen и др. [9] показало, что по некоторым результатам обучения программированию различий между студентами при разных видах обучения нет, но итоговый балл был существенно ниже при онлайн обучении. Заметим, однако, что это исследование датируется 2013-м годом. Исследование J. Paul and F. Jefferson, проводившееся 8 лет (с 2009 по 2016 гг.) показало, что нет существенных различий в эффективности студентов при изучении наук об окружающей среде [17]. Мета-анализ L. Pei и H. Wu [18] показывает, что в медицинском образовании нет достаточных оснований считать, что очное обучение эффективнее. Исследование J. Cavanaugh и S.J. Jacquemin [8] с использованием данных более 5000 курсов, преподаваемых более 100 преподавателями за десятилетний период, показало, что различия в оценках по 4х-балльной шкале между различными видами обучения составили всего 0,07 балла. При этом наибольшее влияние на успеваемость при любом методе обучения оказывает средний балл: чем лучше студент умеет учиться, тем эффективнее он осваивает курс, вне зависимости от формата. Это подтверждается и в исследовании C.S. Lang и др. [13], где показано, что образовательные результаты студентов



в онлайн-курсах существенно не отличаются от результатов студентов, обучающихся в очном формате. В работе A.R. Hurlbut [12], наоборот, обнаружено, что студенты традиционного обучения обычно получают несколько более высокие оценки за задания, чем те, кто участвовал в онлайн-курсах; однако на общую результативность повлияло принятие/непринятие студентами онлайн-курсов. Студенты онлайн-курсов, которые сообщили, что им комфортно учиться в виртуальной среде, и которые удовлетворены качеством преподавания, показали лучшие результаты, чем студенты традиционной формы обучения [12]. В исследовании М.Г. Сороковой [5] сравнивались образовательные результаты студентов, изучавших курс математических методов в психологии в ТОО подходе и с помощью ЭУК в смешанном формате по модели «перевернутый класс». Образовательные результаты студентов после прохождения ЭУК статистически значимо улучшились. Результаты студентов в группе смешанного обучения в ЭУК на выходе в среднем достоверно выше, чем в группе традиционного обучения, однако входного тестирования в группе ТОО не проводилось.

Известно, что смешанное обучение позволяет сочетать в себе преимущества очного и дистанционного образования, что подтверждается рядом мета-исследований. В мета-анализе A. Vallée и др., включающем 56 исследований (N=9943) показано, что смешанное обучение способствует лучшим результатам при оценках знаний, чем традиционное [22]. В мета-анализе R.M. Bernard и др. [6] подтверждается, что по результатам академических достижений смешанное обучение превосходит традиционное на треть стандартного отклонения. Мета-анализ В. Means и др. [15] свидетельствует о том, что в среднем успеваемость студентов при смешанном обучении несколько выше, чем при традиционном; при этом статистически значимые различия обнаруживаются при сравнении смешанного обучения с традиционным, но не в случаях сравнения полностью дистанционного обучения с традиционным.

Основное внимание в сравнительных эмпирических исследованиях уделяется методам и средствам применения цифровых технологий в образовании для выявления факторов повышения их эффективности. Обнаружено, что на образовательные результаты в онлайн-курсах влияет дизайн и логика курса, возможность контактов с преподавателями, интерактивность; показано превосходство гибридной среды в сравнении с полностью онлайн-средой [19]. При этом степень интерактивности онлайн-курсов является одним из основных критериев их продуктивности. Подчеркивается, что и в онлайн, и в традиционном обучении важнейшую роль играет обратная связь с преподавателем, которая попадает в пятерку наиболее полезных стратегий, предполагающих, что именно преподаватель играет ключевую роль при обучении в разных средах [12]. Анализ опыта обучения студентов и их успеваемости в университетских курсах по химии для бакалавриата, проведенный в [14] показал, что стратегия смешанного обучения, именуемая «Открывать, учиться, практиковаться, сотрудничать и оценивать», положительно влияет на студентов и преподавателей.

Исследовательский интерес прикован и к внедрению самых разнообразных технологий для расширения коммуникации в онлайн. Это и использование онлайн-доски для групповых обсуждений, что способствует усилению мотивации и повыше-



нию академической успешности [7]; внедрение индивидуализированного подхода, существенным образом влияющего на успеваемость, самоэффективность и мотивацию студентов при смешанном обучении [24]; использование модели «перевернутый класс» с элементами геймификации как инновационной стратегии для содействия вовлечению студентов и повышению образовательных результатов [11]. Показано, что обучение в перевернутых классах онлайн не оказывает значительного влияния на краткосрочные, но оказывает значительное влияние на долгосрочные результаты обучения [10]. В аналитическом обзоре [16] с использованием 5-ти баз данных рандомизированных испытаний, в которых измеряли обучающий эффект от видео среди студентов колледжей, отмечается, что добавление видео в электронные курсы способствует эффективности процесса обучения.

Таким образом, исследования разных средовых условий не дают четкого представления относительно образовательных результатов студентов в электронных курсах, и если академические достижения студентов, обучающихся в электронных курсах, при смешанном и онлайн-форматах обучения за рубежом изучаются довольно активно, то соотношение предметных результатов студентов разного уровня образования (магистратуры, второго высшего образования, первого высшего), а также эффекты обучения в электронных курсах в смешанном и онлайн-форматах по сравнению с первоначальным уровнем знаний, представлены лишь частично. Большой дефицит эмпирических исследований по данной проблематике наблюдается в российской науке.

Для восполнения данного пробела нами было проведено настоящее исследование, которое позволит внести свой вклад в практику высшего образования для совершенствования онлайн-обучения. Исследовательские вопросы, на которые предстоит ответить:

1. Различаются ли академические достижения студентов, обучающихся в электронных курсах, при смешанном и онлайн-форматах обучения?
2. Как соотносятся предметные результаты студентов магистратуры и программ второго высшего образования, с одной стороны, и программ первого высшего – с другой?
3. Есть ли эффект обучения в электронных курсах в смешанном и онлайн-форматах по сравнению с первоначальным уровнем знаний?

2. МЕТОД

Участники исследования. Выборку составили 809 студентов Московского государственного психолого-педагогического университета (ФГБОУ ВО МГППУ), завершившие электронные учебные курсы (ЭУК) по математическим методам в психологии, из них 418 студентов магистратуры и программ второго высшего образования (14,6 % мужчин, 85,4 % женщин) и 391 студент бакалавриата и специалитета программ 1-го высшего образования (16,1 % мужчин, 83,9 % женщин), различий по полу нет ($\chi^2 = 0,36$, $p = 0,55$). При этом 404 студента (49,9%) обучалось в смешанном формате (из них 18,3% мужчин, 81,7% женщин), 405 студентов (50,1%) – в онлайн-формате (из них 12,6% мужчин, 87,6% женщин), в первой группе доля мужчин несколько преобладает ($\chi^2 = 5,56$, $p = 0,02$), однако статистические различия могут



объясняться и размером выборки. Распределения студентов смешанного (54,0% vs 46,0%) и онлайн-обучения (49,4% vs 50,6%) по группам магистратуры и программ 2-го высшего образования, с одной стороны, и программ 1-го высшего – с другой, не различаются ($\chi^2 = 1,70$, $p = 0,19$).

Контекстные параметры выборки «возраст» и «занятость» собирались с помощью анонимной анкеты обратной связи для анализа опыта обучения, которую студенты заполняли после завершения ЭУК. Анкету заполнили $N = 344$ студента, обучавшиеся в смешанном формате и $N = 396$ – в онлайн-формате, всего 740 студентов. По этой усеченной выборке возрастных различий не выявлено ($\chi^2 = 7,41$, $p = 0,116$). Различий по типу занятости также не выявлено ($\chi^2 = 1,21$, $p = 0,545$). Соотношение долей не работающих студентов в группах смешанного и онлайн-обучения 36,0% vs 39,6%; тех, у кого работа не связана с программой или специальностью обучения, – 36,9% vs 33,6%; работа связана с программой обучения у 27,0% vs 26,8% респондентов соответственно.

Дизайн исследования. Исследование проведено в рамках 2-х летнего научно-исследовательского проекта «Цифровые технологии в высшем образовании: разработка технологии индивидуализации обучения средствами электронных учебных курсов». Всего в эксперименте приняли участие студенты 45 академических групп 6-ти факультетов МГППУ. Студенты бакалавриата и специалитета изучали ЭУК «Математические методы в психологии», студенты магистратуры направления «психолого-педагогическое образование» – ЭУК «Статистические и математические методы в психолого-педагогических исследованиях», а направления «психология» – ЭУК «Математическая обработка данных психолого-педагогических исследований в программе SPSS». Курсы реализованы на платформе Moodle и размещены на сайте <https://e-learning.mgppu.ru>. Автор, разработчик и преподаватель курсов – профессор кафедры прикладной математики М.Г. Сорокова. Семинары в 2-х группах специалитета и 2-х группах магистратуры вели другие преподаватели.

Перед началом изучения ЭУК студент проходит входной тест, после чего ему отрываются все материалы курса. Оценка за ЭУК складывается из оценок по 3-м тестам в первых 3-х модулях, итоговому тесту и оценки за индивидуальное кейс-задание (ИКЗ). ИКЗ предполагает решение 6-ти кейс-заданий из области психолого-педагогических исследований в SPSS по вариантам (100 вариантов). Через 1-1,5 месяца по окончании обучения студенты проходили рубежный контроль – внешний тест через Отдел мониторинга качества профессионального образования (ОМКПО) МГППУ. Входной, итоговый тесты в ЭУК и внешний тест идентичны.

В осеннем семестре 2019-2020 у.г. студенты обучались в смешанном формате по модели «перевернутый класс» [2]. Смешанное обучение (blended learning, BL) означает сочетание очного и онлайн-форматов обучения, а «перевернутый класс (flipped classroom, FC) – одна из его моделей, при которой студенты изучают новый материал дома самостоятельно с помощью видео, интерактивных заданий, онлайн-учебников, презентаций, тестов и других материалов, а на очных семинарах – активизируют и обсуждают эту информацию при модерерирующей роли преподавателя, отвечают на вопросы, решают аутентичные кейсы из области психолого-педагогических исследова-



ний в статистическом пакете SPSS и т.д. Если при традиционно-очной форме обучения преподаватель на лекциях объясняет новый материал, а студенты дома его повторяют и выполняют задания, то в модели «перевернутый класс», как видим, все наоборот. Модель «перевернутый класс» может применяться также полностью в онлайн-формате: в этом случае студенты решают кейсы самостоятельно вне рамок вебинара.

Управление обучением с помощью LMS Moodle или любой такой платформы не сводится исключительно к размещению там учебных материалов, ее возможности индивидуализации учебного процесса гораздо шире. Во-первых, студент всегда оставляет цифровой след, поэтому преподаватель знает в любой момент о каждом студенте все, и это помогает принимать решения о процессе обучения как отдельного студента, так и группы в целом и гибко перестраивать его. Во-вторых, преподаватель всегда доступен для студента, поэтому контакты между ними интенсифицируются. Например, студенты могут обсуждать с преподавателем и друг с другом вопросы на форуме, писать преподавателю индивидуально, причем вся переписка рассортирована по адресатам. Есть опция веерной рассылки информации. В-третьих, вся отчетность – тесты, кейсы студентов и пр. – проходит студентами в индивидуальном темпе, преподаватель может это регулировать, устанавливать дедлайны, условия доступа к тестам и др. Есть еще множество опций, которые существенно по сравнению с традиционным подходом увеличивают возможности интенсификации и гибкого управления процессом учения при модерировании его преподавателем.

В осеннем семестре 2020-2021 учебного года во все ЭУК с целью большей индивидуализации процесса обучения были добавлены интерактивные задания для самостоятельной работы студентов с видео-лекциями и видеороликами решения кейсов в SPSS. При просмотре видео запись периодически останавливается и студенту предлагаются разнообразные проверочные задания, например, вписать недостающие слова в текст или выбрать такие слова из предложенного набора, ответить на вопрос «да» или «нет», выбрать правильный ответ из предложенных, решить мини-кроссворд и т.д. Есть опция показа правильных ответов и повторного выполнения заданий. Кроме того, все семинарские занятия проходили полностью в онлайн-формате, т.к. весь университет работал в дистанционном режиме.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Проверка различий результатов итогового теста и итоговой оценки по ЭУК проводилась с помощью двухфакторного ковариационного анализа (ANCOVA) 2x2, где в качестве ковариаты рассматривались результаты входного теста. Ковариата использована для удаления посторонней вариации из зависимой переменной и выявления эффектов факторов. Факторами стали формат обучения (смешанное vs онлайн) и уровень высшего образования (магистратура и второе высшее vs первое высшее).

Анализ показал, что различия по итоговому тесту между студентами магистратуры и второго высшего, с одной стороны, и первого высшего, с другой, находятся на грани статистической значимости ($F(1, 804) = 3,78, p = 0,052$), причем разность в средних составляет лишь около 1 процентного пункта, что согласуется с результата-



ми нашего предшествующего исследования [3]. Совместного влияния обоих факторов также не выявлено ($F(1, 804) = 0,05$, $p = 0,82$). Вместе с тем, студенты онлайн-обучения показали в среднем более высокие результаты по сравнению с группой смешанного обучения как по входному тесту (36,22 % vs 34,33 %), так и по итоговому тесту (86,17 % vs 84,21 %, $F(1, 804) = 5,61$, $p = 0,018$), то есть их небольшое преимущество в 2 процентных пункта сохранилось и после прохождения обучения в ЭУК. Эффект влияния ковариаты статистически значим ($F(1, 804) = 16,68$, $p < 0,001$). Критерий Ливиня подтверждает равенство дисперсий по итоговому тесту ($F(1, 804) = 0,42$, $p = 0,74$). Описательные статистики представлены в Табл. 1.

Аналогичные результаты получены при исследовании показателей итоговой оценки за ЭУК, выраженной в процентных пунктах (табл.1). Различия между студентами магистратуры и второго высшего, с одной стороны, и первого высшего, с другой, едва достигают уровня статистической значимости ($F(1, 804) = 3,93$, $p = 0,048$), совместного влияния обоих факторов нет ($F(1, 804) = 1,04$, $p = 0,31$). Вместе с тем, студенты онлайн-обучения по итоговой оценке за ЭУК результаты в среднем более высокие по сравнению с группой смешанного обучения (86,85 vs 84,12, $F(1, 804) = 18,37$, $p < 0,001$), но преимущество вновь составило менее 2-х процентных пунктов. Эффект влияния ковариаты статистически значим ($F(1, 804) = 30,30$, $p < 0,0001$). Согласно критерию Ливиня, дисперсии равны ($F(1, 804) = 1,43$, $p = 0,23$).

Группа		Среднее \pm стандартное отклонение		N
		Итоговый тест	Итоговая оценка за ЭУК	
Смешанное обучение	Магистратура и второе высшее	84,91 \pm 10,32	84,72 \pm 9,01	218
	Первое высшее	83,39 \pm 11,16	83,41 \pm 7,64	186
	Всего	84,21 \pm 10,73	84,12 \pm 8,43	404
Онлайн обучение	Магистратура и второе высшее	86,43 \pm 10,93	86,73 \pm 7,94	200
	Первое высшее	85,91 \pm 10,54	86,98 \pm 8,01	205
	Всего	86,17 \pm 10,72	86,85 \pm 7,97	405
Всего	Магистратура и второе высшее	85,64 \pm 10,63	85,68 \pm 8,57	418
	Первое высшее	84,71 \pm 10,90	85,28 \pm 8,03	391
	Всего	85,19 \pm 10,77	85,48 \pm 8,31	809

Рассмотрим теперь динамику изменения образовательных результатов на входе, на выходе и через 1–1,5 месяца по окончании обучения. Сравнение всех показателей успеваемости, то есть по входному, итоговому тестам и итоговой оценке в ЭУК, а также внешнему тесту через ОМКПО МГППУ проводилось с помощью двухфакторного дисперсионного анализа для смешанной схемы. Обратим внимание, что по организационным причинам не все студенты проходили внешнее тестирование как



при смешанном, так и при онлайн-обучении. При смешанном обучении в ОМКПО тестировались как студенты магистратуры и программ второго высшего, так и первого высшего образования ($N = 282$), при онлайн-обучении – только первого высшего ($N = 181$), поэтому дисперсионный анализ был проведен на усеченной выборке, и его результаты несколько отличаются от результатов ANCOVA, полученных на полной выборке из $N = 809$ испытуемых. Результаты сравнения представлены на рисунке 1.

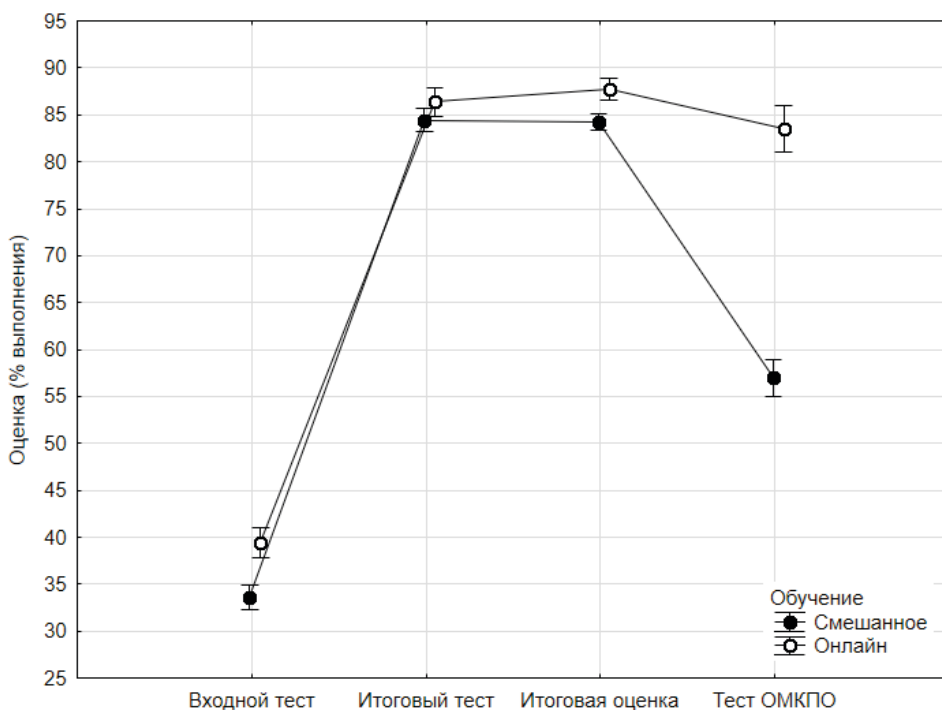


Рис. 1. Средние значения по показателям академических достижений в группах смешанного и онлайн обучения. Вертикальные отрезки обозначают 95 % доверительный интервал

Дисперсионный анализ показал статистически значимое взаимодействие между видом обучения и типом тестирования ($F(3, 1383) = 142,27$; $p < 0,0001$), следовательно, оценки за обучения изменяются по-разному в зависимости от типа обучения. Действительно, если на этапе входного тестирования студенты онлайн-обучения показали более высокие баллы (апостериорный критерий Тьюки, $p < 0,001$), то на этапе итогового тестирования и итоговой оценки результаты статистически значимо не различаются как при смешанном, так и при онлайн обучении (апостериорный критерий Тьюки, $p = 0,65$ и $p = 0,052$ соответственно). При этом итоговые оценки не отличаются от оценок итогового теста как при одном, так и при другом виде обучения (апостериорный критерий Тьюки, $p = 0,99$ и $p = 0,94$). Интересно, что при отсроченном тестировании (внешний тест в ОМКПО) оценки становятся ниже по сравнению с итоговой оценкой как для смешанного обучения (апостериорный критерий Тью-



ки, $p < 0,001$), так и для онлайн-обучения (апостериорный критерий Тьюки, $p = 0,003$), что закономерно, но если для онлайн обучения падение в успеваемости составляет всего 4 балла, то для смешанного обучения – 27 баллов, то есть более, чем на треть от исходного показателя. Таким образом, лучшая динамика изменения показателей наблюдается при онлайн-обучении.

Последний результат, однако, имеет ограничения, т.к. условия проведения внешнего тестирования не были одинаковыми для студентов обеих форм обучения. Если при смешанном обучении внешнее тестирование проводилось очно в компьютерном классе МГППУ в присутствии наблюдателя – сотрудника ОМКПО, то при онлайн-обучении студенты проходили его удаленно по ссылке из ОМКПО. Второй вариант дает больше возможностей для применения нечестных стратегий при тестировании, наличие которых признают студенты как бакалавриата и специалитета, так и магистратуры [4, 20, 21]. В целом, при онлайн-обучении мы наблюдаем тот же эффект, что и при смешанном обучении [3, 20]: статистически значимый рост средних показателей при итоговом тестировании по сравнению со входным, а затем спад при оценке отдельных результатов, которые, тем не менее, оставались значимо выше входных. Лучшие результаты внешнего теста при онлайн-обучении, возможно, объясняются также более коротким промежутком с момента окончания обучения, а именно, через 1–1,5 месяца, в то время как при смешанном обучении интервал составил от 1,5 до 4-х месяцев. Проблема устойчивости эффекта обучения в ЭУК как в смешанном, так и в онлайн-формате требует дальнейшего исследования.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Студенты онлайн-обучения показали в среднем более высокие результаты по сравнению с группой смешанного обучения по входному тесту, по итоговому тесту и по итоговой оценке за ЭУК, однако разность в средних по всем 3-м показателям минимальна и составляет всего 1,2–2 процентных пункта, а значимость различий обеспечивается большим объемом выборки. На меньшей выборке на этапе итогового тестирования и итоговой оценки за ЭУК значимых различий при смешанном и при онлайн обучении не выявлено.

Предметные результаты студентов магистратуры и программ второго высшего образования, с одной стороны, и программ первого высшего – с другой, также практически одинаковы: различия по итоговому тесту и итоговой оценке за ЭУК находятся на грани статистической значимости, причем разность в средних минимальна и составляет лишь около 1 процентного пункта, что согласуется с результатами нашего предшествующего исследования.

Динамика изменения средних значений по показателям академических достижений в группах смешанного и онлайн обучения демонстрирует весьма выраженный – около 50 процентных пунктов – рост показателей итогового теста в ЭУК по сравнению со входными, а затем менее выраженный спад результатов через 1–1,5 месяца, измеренных по внешнему тесту, которые остаются значимо выше входных. При этом



в группе смешанного обучения он составил около 30 процентных пунктов, а в группе онлайн-обучения – всего 4, т.е. спад очень незначительный. Последний результат требует дальнейшей проверки при более уравниваемых условиях внешнего тестирования. Таким образом, эффект обучения в электронных курсах в смешанном и онлайн-форматах по сравнению с первоначальным уровнем знаний, несомненно, есть.

Вернемся теперь к едва ли не основному вопросу, волнующему сейчас всё профессиональное сообщество – исследователей, преподавателей, руководителей высшего образования всех уровней и других стейкхолдеров: как повлиял стремительный переход в онлайн-формат на качество образования в вузах? Ещё немного полемически заострим вопрос: верно ли, что с переходом в онлайн качество высшего образования неминуемо ухудшается, а цифровые технологии – это «неизбежное зло»? Заметим, что последняя постановка вопроса представляется нам, как минимум, некорректной, так как цифровые технологии в образовании – это мощный общемировой тренд, в русле которого, как показано выше, уже лет 10 выполняются многочисленные эмпирические исследования. Ситуация пандемии лишь катализировала эти процессы, и те вузы, кто был готов к переходу в онлайн-формат, выдержали его с честью. Наше исследование показывает, что учебный процесс на основе ЭУК как в смешанном, так и в онлайн-формате, является весьма эффективным. При этом переход в онлайн-формат проходит абсолютно безболезненно: очные семинары превращаются в вебинары – это синхронное обучение, а все материалы для самостоятельного изучения, выполнения заданий, тестов, кейсов и т.д. по-прежнему размещаются в ЭУК – это асинхронная его часть. На наш взгляд, формула «электронный курс плюс» может быть в перспективе формулой современного подхода в высшем образовании: ЭУК плюс очные семинары – это смешанный формат изучения курса, ЭУК плюс вебинары – это онлайн-формат, ЭУК плюс модерирование процесса изучения курса преподавателем вообще без вебинаров, а только через форумы и коммуникацию со студентами внутри ЭУК средствами LMS – это формат MOOC. Все три формата очень перспективны, объективно востребованы и предоставляют широкие возможности индивидуализации и вариативности учебного процесса, необходима дальнейшая систематическая разработка методов такого обучения при продолжении сопутствующих эмпирических исследований.

Литература

1. *Лейбина А.В., Шукурян Г.А.* Способы повышения эффективности онлайн-образования // Современная зарубежная психология. 2020. Том 9. № 3. С. 21–33. doi:10.17759/jmfp.2020090302
2. *Марголис А.А.* Что смешивает смешанное обучение? // Психологическая наука и образование. 2018. Том 23. № 3. С. 5–19. doi:10.17759/pse.2018230301
3. *Сорокова М.Г.* Предметные результаты студентов в цифровой среде университета на разных уровнях высшего образования: так кто же более успешен? // Психологическая наука и образование. 2021. Том 26. № 1. С. 76–91. doi:10.17759/pse.2021260105
4. *Сорокова М.Г.* Цифровая образовательная среда университета: кому более комфортно в ней учиться? // Психологическая наука и образование. 2020. Том 25. № 2. С. 44–58. doi:10.17759/pse.2020250204



5. Сорокова М.Г. Электронный курс как цифровой образовательный ресурс смешанного обучения в условиях высшего образования // Психологическая наука и образование. 2020. Том 25. № 1. С. 36–50. doi:10.17759/pse.2020250104
6. Bernard R.M., Borokhovski, E., Schmid R.F., et al. A meta-analysis of blended learning and technology use in higher education: from the general to the applied // Journal of Computing in Higher Education. 2014. No. 26. P. 87–122. doi:10.1007/s12528-013-9077-3
7. Calderon O., Sood C. Evaluating learning outcomes of an asynchronous online discussion assignment: a post-priori content analysis // Interactive Learning Environments. 2020. No. 28(1). P. 3–17. doi:10.1080/10494820.2018.1510421
8. Cavanaugh J., Jacquemin S.J. A Large Sample Comparison of Grade Based Student Learning Outcomes in Online vs. Face-to-Face courses // Online Learning. 2015. Vol. 19. No. 2. doi:10.24059/olj.v19i2.454
9. Gulsecen S., Zerrin A.R., Çiğdem E., et al. Comparison of on-line and F2F education methods in teaching computer programming // World Journal on Educational Technology. 2013. No. 5. P. 291–300.
10. Hsiao C.C., Huang J.C.H., Huang A.Y.Q., et al. Exploring the effects of online learning behaviors on short-term and long-term learning outcomes in flipped classrooms // Interactive Learning Environments. 2019. No. 27(8). P. 1160–1177. doi:10.1080/10494820.2018.1522651
11. Huang B., Hew K.F., Lo C.K. Investigating the effects of gamification-enhanced flipped learning on undergraduate students' behavioral and cognitive engagement // Interactive Learning Environments. 2019. No. 27(8). P. 1106–1126. doi:10.1080/10494820.2018.1495653.
12. Hurlbut A.R. Online vs. traditional learning in teacher education: a comparison of student progress // American Journal of Distance Education. 2018. No. 32(4). P. 248–266. doi:10.1080/08923647.2018.1509265
13. Lang C.S., Holzmann G., Hullinger H., et al. Online or Face-to-Face: Do mission-related student learning outcomes differ? // Christian Higher Education. 2019. No. 18(3). P. 177–187. doi:10.1080/15363759.2018.1460882
14. Lapitan L.Jr., Tiangco C., Sumalinog D., et al. An effective blended online teaching and learning strategy during the COVID-19 pandemic // Education for Chemical Engineers. 2021. No. 35. P. 116–131. doi:10.1016/j.ece.2021.01.012
15. Means B., Toyama Y., Murphy R., Baki M. The effectiveness of online and blended learning: A meta-analysis of the empirical literature // Teachers College Record. 2013. No. 115(3). P. 1–47.
16. Noetel M., Griffith S., Delaney O., et al. Video improves learning in higher education: A systematic review // Review of Educational Research. 2021. No. 91(2). P. 204–236. doi.org/10.3102/0034654321990713
17. Paul J., Jefferson F. A Comparative analysis of student performance in an online vs. Face-to-Face environmental science course from 2009 to 2016 // Frontiers of Computer Science. 2019. No. 1(7). doi: 10.3389/fcomp.2019.00007
18. Pei L., Wu H. Does online learning work better than offline learning in undergraduate medical education? A systematic review and meta-analysis // Medical Education Online. 2019. No. 24(1):1666538. doi:10.1080/10872981.2019.1666538
19. Shea P., Bidjerano T. Understanding distinctions in learning in hybrid, and online environments: an empirical investigation of the community of inquiry framework // Interactive Learning Environments. 2013. No. 21(4). P. 355–370. doi:10.1080/10494820.2011.584320
20. Sorokova M. Educational outcomes of graduate and undergraduate students who completed e-courses in mathematical methods in psychological and educational researches. 2020. Mendeley Data. V1. doi: 10.17632/hvfkdpfwnr.1
21. Sorokova M.G. Skepticism and learning difficulties in a digital environment at the Bachelor's and



- Master's levels: are preconceptions valid? // *Heliyon*. 2020. Vol. 6. No. 11. e05335. doi:10.1016/j.heliyon.2020.e05335
22. *Vallée A., Blacher J., Cariou A., Sorbets E.* Blended Learning Compared to Traditional Learning in Medical Education: Systematic Review and Meta-Analysis // *Journal of Medical Internet Research*. 2020. No. 22(8). e16504. doi: 10.2196/16504
23. *Wang C.H., Shannon D.M., Ross M.E.* Students' characteristics, self-regulated learning, technology self-efficacy, and course outcomes in online learning // *Distance Education*. 2013. No. 34 (3). P. 302–323. doi:10.1080/01587919.2013.835779
24. *Zhang J.-H., Zou L., Miao J., et al.* An individualized intervention approach to improving university students' learning performance and interactive behaviors in a blended learning environment // *Interactive Learning Environments*. 2020. No. 28(2). P. 231–245. doi:10.1080/10494820.2019.1636078



Students Educational Results in Blended and Online E-Courses

Marina G. Sorokova*

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE),
Moscow, Russian Federation
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1000-6487>
e-mail: sorokovamg@mgppu.ru

Maria A. Odintsova**

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE),
Moscow, Russian Federation
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3106-4616>
e-mail: mari505@mail.ru

Nataly P. Radchikova***

Moscow State Pedagogical University (MSPU),
Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE),
Moscow, Russian Federation
ORCID: 0000-0002-5139-8288
e-mail: nataly.radchikova@gmail.com

The article presents a comparative analysis of the academic achievements of students who completed e-courses on mathematical methods in psychology by means of blended learning (N = 404) and online learning (N = 405). The research was carried out at the Moscow State University of Psychology and Education. Students in online learning achieved, on average, higher results compared with the blended learning group in the pre-test, post-test, and final course grades, however, the difference in the means for all 3 indicators is minimal, and the significance of the differences is provided by the large sample size. In a smaller sample, no significant differences in post-test and final course grades were found between the two groups. The academic achievements of graduate and undergraduate students are also practically equal: the differences in the post-test and final grade are on the verge of statistical significance, and the difference in the means is minimal and is only about 1 percentage point, which is consistent with our previous study. The dynamics of changes in the average values for academic achievement indicators in the groups of blended and online learning showed a very pronounced – about 50 percentage points – growth in the posttest indicators compared to the pretest, and then a less pronounced decline in results after 1–1.5 months, measured according to the external test, which remain significantly higher than the pre-test. The decline in the online learning group is very minor, i.e., the dynamics is better. The latter result requires further verification under more equalized external testing conditions. The effect of learning in e-courses in both blended and online formats has been statistically proven. The “e-course plus” formula is proposed as a formula for a modern approach in higher education.

Keywords: digital educational environment of the university, e-learning course, blended learning, flipped classroom, online learning



Funding. The reported study was funded by the Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE) in the framework of the research project “Digital Technologies in Higher Education: Development of Technology for Individualizing Education Using E-Courses”.

For citation:

Sorokova M.G., Odintsova M.A., Radchikova N.P. Students Educational Results in Blended and Online E-Courses. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 1, pp. 61–77. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110105> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Leibina A.V., Shukuryan G.A. Sposoby povysheniya effektivnosti onlain-obrazovaniya [Ways to enhance the effectiveness of online education]. *Sovremennaya zarubezhnaya psikhologiya [Journal of Modern Foreign Psychology]*, 2020, no. 9(3), pp. 21–33. doi:10.17759/jmfp.2020090302 (In Russ., abstr. in Engl.)
2. Margolis A.A. Chto smeshivaet smeshannoe obuchenie? [What Kind of Blending Makes Blended Learning?]. *Psikhologicheskaya nauka i obrazovanie [Psychological Science and Education]*, 2018, no. 23(3), pp. 5–19. doi:10.17759/pse.2018230301 (In Russ., abstr. in Engl.)
3. Sorokova M.G. Predmetnye rezul'taty studentov v tsifrovoi srede universiteta na raznykh urovn-yakh vysshego obrazovaniya: tak kto zhe bolee uspeshen? [Outcomes of Students in University Digital Environment at Different Levels of Higher Education: Who Is More Successful?]. *Psikhologicheskaya nauka i obrazovanie [Psychological Science and Education]*, 2021, no. 26(1), pp. 76–91. doi:10.17759/pse.2021260105 (In Russ., abstr. in Engl.)
4. Sorokova M.G. Tsifrovaya obrazovatel'naya sreda universiteta: komu bolee komfortno v nei učit'sya? [Digital Educational Environment in University: Who is More Comfortable Studying in it?]. *Psikhologicheskaya nauka i obrazovanie [Psychological Science and Education]*, 2020, no. 25(2), pp. 44–58. doi:10.17759/pse.2020250204 (In Russ., abstr. in Engl.)
5. Sorokova M.G. Elektronnyi kurs kak tsifrovoi obrazovatel'nyi resurs smeshannogo obucheniya v usloviyakh vysshego obrazovaniya [E-Course as Blended Learning Digital Educational Resource in University]. *Psikhologicheskaya nauka i obrazovanie [Psychological Science and Education]*, 2020, no. 25(1), pp. 36–50. doi:10.17759/pse.2020250104 (In Russ., abstr. in Engl.)

***Marina G. Sorokova**, Doctor of Education, PhD in Physics and Mathematics, Head of Scientific and Practical Center for Comprehensive Support of Psychological Research «PsyDATA», Professor, Chair of Applied Mathematics Department, Faculty of Information Technology, Moscow State University of Psychology & Education, Moscow, Russia, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1000-6487>, e-mail: sorokovamg@mppu.ru

****Maria A. Odintsova**, PhD in Psychology, Professor, Chair of Psychology and Pedagogy of Distance Learning, Head of the Chair of Psychology and Pedagogy of Distance Learning, Faculty of Distance Learning, Moscow State University of Psychology & Education, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3106-4616>, e-mail: mari505@mail.ru

*****Nataly P. Radchikova**, PhD in Psychology, Associate Professor of the Department of Developmental Psychology, Faculty of Pre-School Pedagogy and Psychology, Moscow Pedagogical State University; Leading Researcher of Scientific and Practical Center for Comprehensive Support of Psychological Research «PsyDATA», Moscow State University of Psychology & Education, Moscow, Russia, ORCID: 0000-0002-5139-8288, e-mail: nataly.radchikova@gmail.com



6. Bernard R.M., Borokhovski, E., Schmid R.F., et al. A meta-analysis of blended learning and technology use in higher education: from the general to the applied. *Journal of Computing in Higher Education*, 2014, no. 26, pp. 87–122. doi:10.1007/s12528–013–9077–3
7. Calderon O., Sood C. Evaluating learning outcomes of an asynchronous online discussion assignment: a post-priori content analysis. *Interactive Learning Environments*, 2020, no. 28(1), pp. 3–17. doi:10.1080/10494820.2018.1510421
8. Cavanaugh J., Jacquemin S.J. A Large Sample Comparison of Grade Based Student Learning Outcomes in Online vs. Face-to-Face courses. *Online Learning*, 2015, no. 19(2). doi:10.24059/olj.v19i2.454
9. Gulsecen S., Zerrin A.R., Çiğdem E., et al. Comparison of on-line and F2F education methods in teaching computer programming. *World Journal on Educational Technology*, 2013, no. 5, pp. 291–300.
10. Hsiao C.C., Huang J.C.H., Huang A.Y.Q., et al. Exploring the effects of online learning behaviors on short-term and long-term learning outcomes in flipped classrooms. *Interactive Learning Environments*, 2019, no. 27(8), pp. 1160–1177. doi:10.1080/10494820.2018.1522651
11. Huang B., Hew K.F., Lo C.K. Investigating the effects of gamification-enhanced flipped learning on undergraduate students' behavioral and cognitive engagement. *Interactive Learning Environments*, 2019, no. 27(8), pp. 1106–1126. doi:10.1080/10494820.2018.1495653.
12. Hurlbut A.R. Online vs. traditional learning in teacher education: a comparison of student progress. *American Journal of Distance Education*, 2018, no. 32(4), pp. 248–266. doi:10.1080/08923647.2018.1509265
13. Lang C.S., Holzmann G., Hullinger H., et al. Online or Face-to-Face: Do mission-related student learning outcomes differ? *Christian Higher Education*, 2019, no. 18(3), pp. 177–187. doi:10.1080/15363759.2018.1460882
14. Lapitan L.Jr., Tiangco C., Sumalinog D., et al. An effective blended online teaching and learning strategy during the COVID-19 pandemic. *Education for Chemical Engineers*, 2021, no. 35, pp. 116–131. doi:10.1016/j.ece.2021.01.012
15. Means B., Toyama Y., Murphy R., Baki M. The effectiveness of online and blended learning: A meta-analysis of the empirical literature. *Teachers College Record*, 2013, no. 115(3), pp. 1–47.
16. Noetel M., Griffith S., Delaney O., et al. Video improves learning in higher education: A systematic review. *Review of Educational Research*, 2021, no. 91(2), pp. 204–236. doi.org/10.3102/0034654321990713
17. Paul J., Jefferson F. A Comparative analysis of student performance in an online vs. Face-to-Face environmental science course from 2009 to 2016. *Frontiers of Computer Science*, 2019, no. 1(7). doi: 10.3389/fcomp.2019.00007
18. Pei L., Wu H. Does online learning work better than offline learning in undergraduate medical education? A systematic review and meta-analysis. *Medical Education Online*, 2019, no. 24(1): 1666538. doi:10.1080/10872981.2019.1666538
19. Shea P., Bidjerano T. Understanding distinctions in learning in hybrid, and online environments: an empirical investigation of the community of inquiry framework. *Interactive Learning Environments*, 2013, no. 21(4), pp. 355–370. doi:10.1080/10494820.2011.584320
20. Sorokova M. Educational outcomes of graduate and undergraduate students who completed e-courses in mathematical methods in psychological and educational researches. *Mendeley Data*, 2020, V1. doi: 10.17632/hvfkdpfwnr.1
21. Sorokova M.G. Skepticism and learning difficulties in a digital environment at the Bachelor's and Master's levels: are preconceptions valid? *Heliyon*, 2020, no. 6(11). e05335. doi:10.1016/j.heliyon.2020.e05335



22. Vallée A., Blacher J., Cariou A., Sorbets E. Blended Learning Compared to Traditional Learning in Medical Education: Systematic Review and Meta-Analysis. *Journal of Medical Internet Research*, 2020, no. 22(8). e16504. doi: 10.2196/16504
23. Wang C.H., Shannon D.M., Ross M.E. Students' characteristics, self-regulated learning, technology self-efficacy, and course outcomes in online learning. *Distance Education*, 2013, no. 34 (3), pp. 302–323. doi:10.1080/01587919.2013.835779
24. Zhang J.-H., Zou L., Miao J., et al. An individualized intervention approach to improving university students' learning performance and interactive behaviors in a blended learning environment. *Interactive Learning Environments*, 2020, no. 28(2), pp. 231–245. doi:10.1080/10494820.2019.1636078

Применение цифровой адаптивной платформы для обучения программированию с функцией формирования навыков командной работы

Попков С.И.*

Московский государственный психолого-педагогический университет,
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2566-1262>
e-mail: rslw25@gmail.com

Проведено исследование способов применения цифровой адаптивной платформы для обучения программированию с функцией формирования навыков командной работы. Продемонстрирован интерфейс рабочей среды и основные компоненты, обеспечивающие адаптивность платформы. Детально описана работа служб платформы, отвечающих за функции информационной безопасности. Приведен пример предъявляемого задания.

Ключевые слова: адаптивность, цифровая платформа, sandbox, обучение программированию.

Для цитаты:

Попков С.И. Применение цифровой адаптивной платформы для обучения программированию с функцией формирования навыков командной работы // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 1. С. 78–93. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110106>

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье «Особенности программной реализации цифровой адаптивной платформы для обучения программированию с функцией формирования навыков командной работы» [1] была представлена концепция, позволяющая обучать программированию учащихся разного уровня, в частности, студентов высших учебных заведений. Были исследованы аналоги, выявлены их недостатки и сформулированы критерии, которым должна удовлетворять цифровая платформа для преодоления

***Попков Сергей Игоревич**, кандидат физико-математических наук, доцент факультета информационных технологий Московского государственного психолого-педагогического университета, г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2566-1262>, e-mail: rslw25@gmail.com



этих недостатков. Было обосновано применение платформы в качестве инструмента для психолого-педагогических исследований в специфической востребованной области, связанной с обучением информационным технологиям и формированием навыков командной работы и взаимодействия обучающихся в группе. Материал упомянутой статьи позволяет ознакомиться с проблематикой, построить архитектуру цифровой платформы и проверить ее по составленным критериям на соответствие заявленной в работе концепции.

Однако, детали, связанные с подходом к обучению платформы, равно как и примеры реализации предъявляемого задания, а также демонстрация способов реализации принципов информационной безопасности в ходе работы платформы не была продемонстрирована в упомянутой выше статье.

Материал этой статьи призван восполнить этот недостаток и представить более полное изложение существенных деталей работы платформы и характер взаимодействия с обучающимся пользователем (студентом) в рамках поставленных выше задач.

Хотя скрупулезное описание конкретных деталей выбранного решения для построения цифровой адаптивной платформы для обучения программированию с функцией формирования навыков командной работы с точки зрения безопасности и обеспечения адаптивности (например, описание конкретной модели машинного обучения, используемой в процессе генерации адаптивного сценария, или конкретные версии операционных систем и других приложений и модулей, составляющих окружение клиент-серверной архитектуры) и выходит за рамки материала данной статьи, для полноты изложения и ответа на основные вопросы о принципах работы платформы необходимо в общих чертах, на уровне обобщенных алгоритмов и последовательности выполняемых шагов, описать структуры и процессы, отвечающие за информационную безопасность, за процедуру взаимодействия пользователя с рабочей средой и за механизмы адаптивности платформы.

Необходимо также предоставить информацию о деталях такого взаимодействия в виде снимков экрана в ходе исследования рабочей среды, деталей и особенностей платформы в аспекте предоставляемых пользователю интерфейсов для изменения состояний рабочей среды с целью выполнения индивидуальных заданий или части коллективного задания, описать предметный характер этих заданий, чтобы было понятно, о чем идет речь и как именно формируется единое задание, предъявляемое в качестве окружения рабочей среды.

Перейдем непосредственно к вопросам, связанным с интерфейсами среды на стороне клиента.

2. ОБЗОР ИНТЕРФЕЙСА ГРАФИЧЕСКОЙ СРЕДЫ АДАПТИВНОЙ ПЛАТФОРМЫ НА СТОРОНЕ КЛИЕНТА

Возможный вид графической среды после авторизации студента (обучающегося) продемонстрирован на рис. 1.

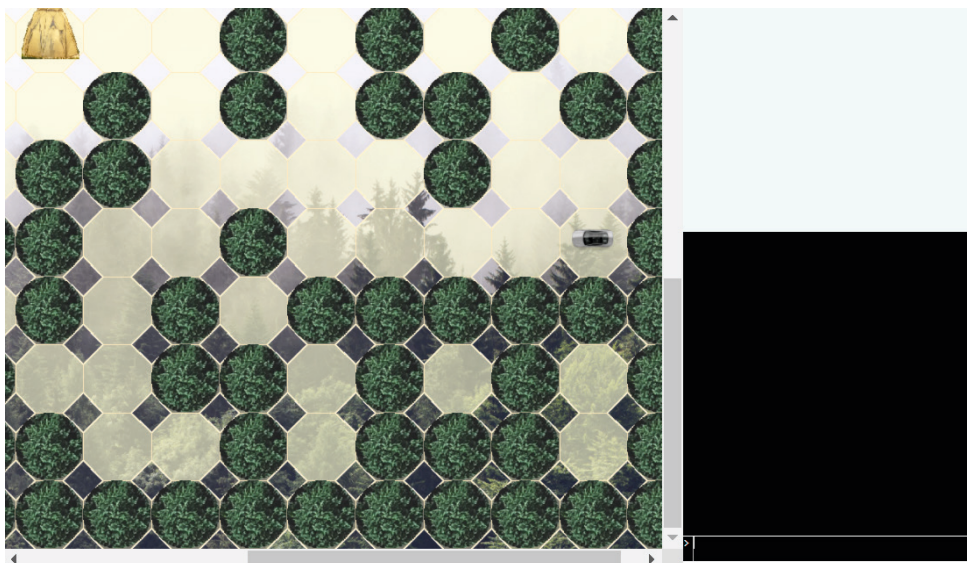


Рис. 1. Графический интерфейс для пользователя платформы (обучающегося) на стороне клиента

Слева располагается окно рабочей среды или карта лабиринта, указывающая местоположение агента (машины), которым управляет студент, в двумерном пространстве. Фон лабиринта, изображение агента и отображение элементов, блокирующих движение агента, зависит от деталей общего сценария, определяющих декоративные элементы. В данном случае в качестве фона служит лес, в качестве элементов, блокирующих движение агента – деревья.

Справа сверху располагается пространство информационной справки. Справка активируется при прохождении индивидуальных заданий для того, чтобы объяснять суть поставленной задачи, как с точки зрения сценария, так и с точки зрения применяемых технологий программирования. Также пространство информационной справки, по запросу студента, может содержать подсказки, если таковые имеются для текущего индивидуального задания.

Справа внизу располагается консоль, через которую осуществляются все функции по взаимодействию с рабочей средой, в том числе, перемещение агента по лабиринту, загрузка решений для индивидуальных и коллективных заданий, получение сведений о мире и статусе других участников и т.п. Взаимодействие осуществляется путем ввода набора команд, выполнение которых приводит к желаемым результатам.

Следует отметить, что «команды» берутся на основе функций и операторов из реально существующего языка программирования (в данной реализации – языка JavaScript), при этом функционал языка не урезается – в полной мере для взаимодействия с окружением рабочей среды и управлением агентом допускаются все стандартные конструкции применяемого языка, такие как циклы, условия, элементы объектно-ориентированной парадигмы и прочие возможности. Гипотетически,



это повышает риски с точки зрения информационной безопасности системы, однако в составе платформы реализованы специальные методы, предназначенные для защиты контекста рабочей среды и предотвращения использования потенциальной брешы в безопасности системы (например, попытки обойти предполагаемое решение, получить прямой доступ к инкапсулируемым атрибутам агента, модифицировать состояния лабиринта или иным образом нарушить целостность системы). Эти специальные методы будут рассмотрены далее в этой статье.

Помимо элементов, предусмотренных сценарием, на карте лабиринта отображаются элементы, связанные с прохождением индивидуальных заданий, а также в ячейках поля лабиринта могут находиться невидимые элементы, усложняющие решение общей групповой задачи для формирования навыков командной работы.

Групповое задание представляет собой построение маршрута в двумерном пространстве, обусловленном параметрами рабочей среды; маршрут должен быть построен таким образом, чтобы соединять поэтапно решенные элементы индивидуальных заданий – в контексте игры, данные передаются от одного элемента к другому, а решение индивидуальных заданий активирует элементы, то есть позволяет генерировать передаваемые данные). Групповое решение объединяет результаты работы всех участников и реализуется сообща всей группой.

К элементам, усложняющим решение группового задания (а также позволяющим преодолевать усложняющие факторы), относятся:

1) «Стиратель» – действует неограниченно, уничтожает данные, полученные в ходе посещения элемента индивидуального задания при построении маршрута.

Возможное алгоритмическое решение: проверять переносимые данные на неопределенность, в случае обнаружения утери данных запомнить клетку, в которой это произошло, в дальнейшем обходить. Вернуться к последнему посещенному элементу с индивидуальным заданием, получить данные заново.

2) «Жук» – действует один раз, случайным образом перемешивает значения команд (Например, команда «`car.left()`», перемещающая агента влево, может начать перемещать его вверх).

Возможное алгоритмическое решение: последовательно проверять команды на наличие противоречий, в случае обнаружения противоречий выполнять команды последовательно и по реакции среды определять их новое назначение.

3) «Искажатель» – действует один раз, перемешивает элементы индивидуальных заданий на карте.

Возможное алгоритмическое решение: посетить все элементы индивидуальных заданий и по возвращаемым данным сопоставить ожидаемые значения с новым местоположением.

4) «Телепорт» – действует неограниченно, перемещает агента в произвольное свободное место в двумерном пространстве рабочей среды.

Возможное алгоритмическое решение: проверять текущие координаты в соответствии с предпринятым ранее действием; если обнаружено несоответствие новых координат ожидаемым («ожидаемой») ситуацией с точки зрения агента является



корректное перемещение или случай неудачной попытки перемещения, когда агент остается на месте), то запомнить клетку, в которой это произошло, в дальнейшем обходить. Вернуться к последней посещенной ячейке и передать управление основному алгоритму.

5) «Мина» – действует один раз, приводит агента в неработоспособное состояние.

Возможное алгоритмическое решение: необходимо использовать «Защитника» (см. ниже).

6) «Защитник» – программируемый внешний агент, способный выполнять задания и передавать данные о своем состоянии, в частности, координаты в двумерном пространстве, характеристики работоспособности, хранимые данные, полученные от элемента индивидуального задания. Может использоваться как дополнительный помощник по преодолению влияния элементов, усложняющих решение (например, может «обезвредить мину», пожертвовав собой), обычно появляется в сложных сценариях.

Разберем элементы индивидуального задания на примере. На рис. 2 на полностью видимой ячейке слева изображен подобный элемент – палатка.



Рис. 2. Пример элемента индивидуального задания

Для осуществления взаимодействия с этим элементом агент должен переместиться в ту же ячейку, где находится в данный момент элемент. Процедура перемещения осуществляется с помощью консольных команд. Несмотря на то, что агент может находиться в единицу времени только в середине одной ячейки, анимация переходов отображает перемещение агента плавно. Благодаря внедренной в интерфейс технологии SVG [3], разработанной Консорциумом World Wide Web (W3C) [5], существует возможность масштабирования без значительной потери качества для векторных

элементов, а также предоставляется опция вертикальной и горизонтальной прокрутки окна рабочей среды с помощью элемента «колесо» манипулятора «мышь» (рис. 3).

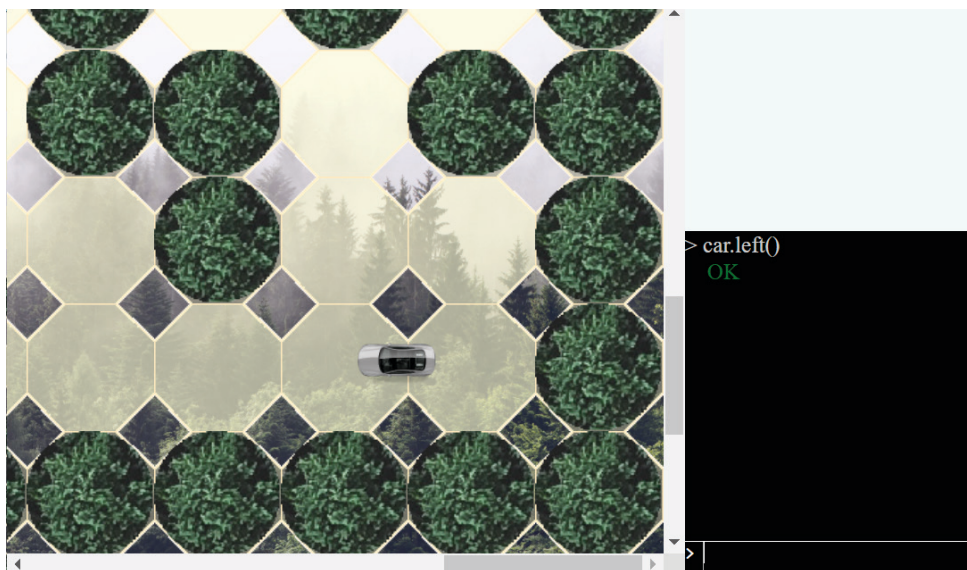


Рис. 3. Перемещение агента в двумерном пространстве рабочей среды в ходе выполнения консольной команды

Пример изменения графической среды на стороне клиента после осуществления взаимодействия агента с элементом показан на рис. 4.

Окно карты заменяется на изображение, демонстрирующее текущую стадию решения задачи для посещенного элемента. Текст слева вверху отражает суть задания, при этом задание генерируется с учетом индивидуальных особенностей студента, в зависимости от уровня его подготовки и допущенных ошибок в ходе решения предыдущих задач при взаимодействии с платформой. Консоль дает подсказку о команде для возврата в обычный режим.

Если студент выбирает это задание в качестве индивидуального (в данном случае – собрать дрова), он пишет файл с кодом, который позволяет решить задачу для произвольного набора входных данных (не только для предложенного в качестве примера в задаче). После этого код отправляется на сервер с помощью консоли, где проверяется на корректность. Если код признан верным, индивидуальное задание может поменяться до тех пор, пока не будет предложен последний этап решения (например, задача «собрать дрова» может быть заменена на «развести костер», и только после этого этапа индивидуальное задание будет считаться решенным в контексте игры).

Пример финального экрана, демонстрирующего завершение выполнения индивидуального задания, показан на рис. 5.

Выполнение индивидуального задания требует знаний в изучаемой области, а результат решения задания с точки зрения сценария приносит пользу группе, делая возможным решение группового задания.

3. ОБЩАЯ СХЕМА КОМПОНЕНТОВ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ АДАПТИВНОСТЬ ПЛАТФОРМЫ

Схема, раскрывающая общий принцип адаптивности, показана на рис. 6.

Обычные стрелки указывают на вызов блока (в направлении вызова), номера стрелок указывают последовательность вызовов между блоками (блок, из которого исходит стрелка с номером 1, является входной точкой, то есть с него начинается работа алгоритма, обеспечивающего адаптивность платформы). Пунктирные линии со стрелками указывают на вызов блока из другого процесса, пунктирные линии с точками указывают на взаимодействие блока с хранилищем, точка по направлению к блоку указывает на операцию чтения, точка по направлению к хранилищу – на операцию записи.

Несмотря на распределенный характер адаптивной платформы и большое количество серверов и баз данных разного назначения, а также компьютеров в локальной сети, описанная схема позволяет абстрагироваться от программно-аппаратных особенностей реализации платформы и сосредоточиться на взаимосвязях и логике компонентов. С этой точки зрения, существуют 2 взаимодействующих между собой процесса.

Процесс адаптивной модификации задания, который объединяет между собой блоки «Загрузка адаптивного тестирования» и «Подготовка динамических элементов» и осуществляет загрузку и подбор динамических компонентов задания для формирования единого задания, предъявляемого участникам группы в рабочей среде.

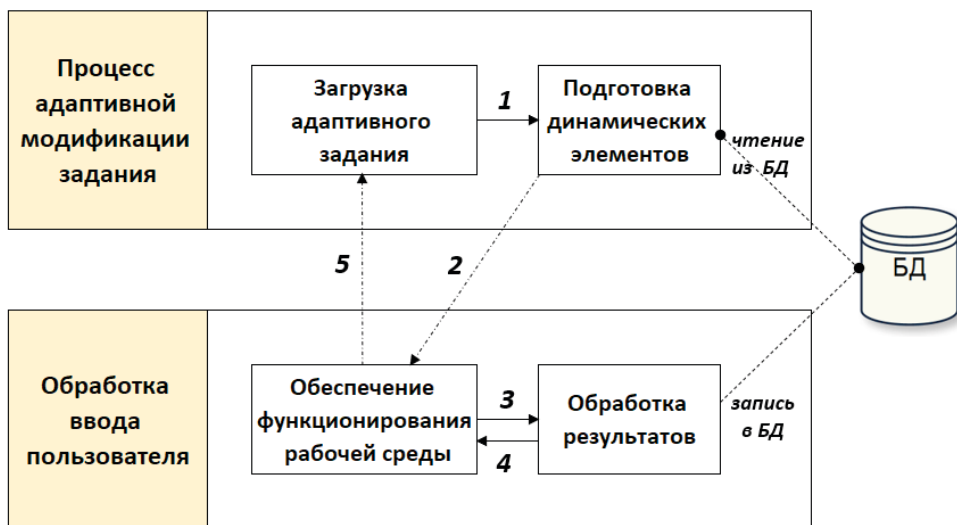


Рис. 6. Общая схема принципа адаптивности платформы

Процесс обработки ввода пользователя, который объединяет между собой блоки «Обеспечение функционирования рабочей среды» и «Обработка результатов» и осуществляет меры по обеспечению безопасного ввода, проверку корректности решений,



предлагаемых пользователем и учет его уровня навыков, а также реализацию процедуры машинного обучения для подготовки новых заданий для участников группы.

Подробное представление схемы, описывающей принцип адаптивности, применяемый в ходе работы цифровой адаптивной платформы, занимает слишком внушительный размер, чтобы ее можно было отобразить в одном наглядном изображении без сопутствующих проблем масштабирования.

Каждый из представленных четырех блоков будет раскрыт в нотации BPMN далее. Схема компонентов показана в максимально общем виде, без раскрытия конкретной модели машинного обучения, значений гиперпараметров, особенностей процедуры оптимизации и прочих технических деталей, выходящих за рамки материала данной статьи. Основное внимание уделено общей процедуре, обеспечивающей взаимодействие компонентов, влияющих на обучение модели и определение уровня навыков пользователей с компонентами, отвечающими за безопасное функционирование рабочей среды и проверку данных, вводимых пользователем.

Структура блока «Загрузка адаптивного задания» приведена на рис. 7.

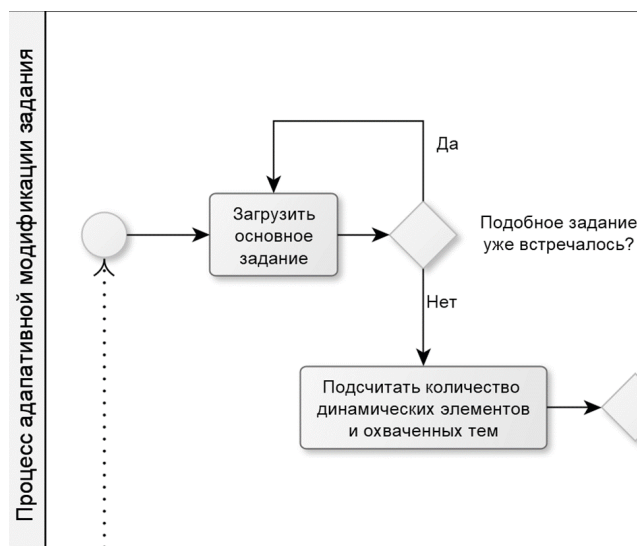


Рис. 7. Структура блока «Загрузка адаптивного задания»

Процесс адаптивной модификации задания начинается с загрузки основного задания, задающего детали сценария и декоративных элементов для всей группы. Обеспечивается уникальность предъявляемого задания (подразумевается, что банк достаточно большой, чтобы количество формулировок и скриптов для различных заданий и сценариев во много раз превышало количество возможных занятий студентов с платформой – то есть число проводимых пар с участием цифровой платформы).

После этого основное задание подвергается семантическому разбору и выявлению потенциально изменяемых фрагментов (слотов), которые можно заменить на

динамические элементы, чтобы обеспечить студентов индивидуальными заданиями с учетом их опыта работы с платформой и общего уровня навыков.

После этого управление передается группе операций, формирующих блок «Подготовка динамических элементов», описываемые операции схематически изображены на рис. 8.

На этом этапе все динамические элементы, которые соответствуют обнаруженным в основном задании слотам, загружаются из базы данных вместе с сопровождающими их данными – описаниями заданий для разных уровней, декоративными элементами, а также серией тестов для запуска в интерактивной среде, обеспечивающей безопасность выполнения кода – «песочнице».

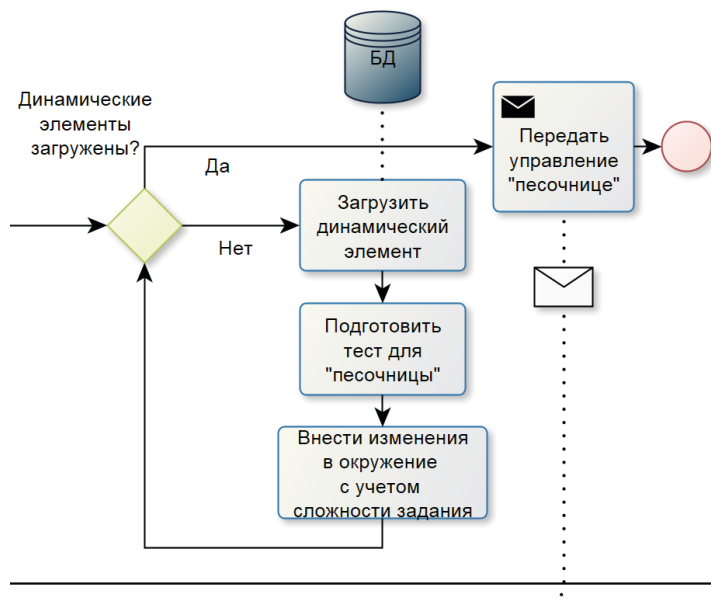


Рис. 8. Структура блока «Подготовка динамических элементов»

В зависимости от опыта и уровня навыков студента динамический элемент, предъявляемый в качестве индивидуального задания, подбирается в соответствии с критерием оптимальной сложности для выполняющего его студента. Этот критерий вычисляется на основе совокупности параметров, включая общий уровень группы, успеваемость по исследуемой в задаче теме, общее количество ошибок, допущенных студентом при выполнении предыдущих заданий и т.п.

Каждому элементу в слоте сопоставляется и загружается из базы данных сопровождающая его серия проверок, входящих в единый протокол теста, определяющий правильность решения для данного элемента задания и характер сделанных ошибок для более точного вычисления критерия оптимальной сложности.

После того, как все слоты перезагружены и заменены актуальными для данной группы участников динамическими элементами, обновленное задание задает окру-



жение рабочей среды и передает управление «песочнице», реализуемой в процессе обработки ввода пользователя. Данный процесс инициируется в ходе передачи управления в блок «Обеспечение функционирования рабочей среды», структура которого представлена на рис. 9.

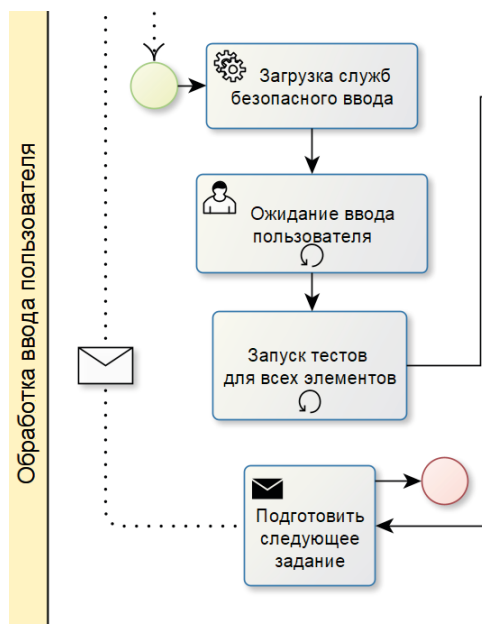


Рис. 9. Структура блока «Подготовка динамических элементов»

Основное предназначение системы – изоляция ввода пользователя и проверка на валидность для предотвращения атак со стороны потенциальных злоумышленников, пытающихся скомпрометировать систему и получить доступ к банку заданий. Также система направлена на предотвращение вредоносных изменений в рабочей среде под воздействием ошибочного кода.

Например, часть заданий подразумевает написание функций, осуществляющих модификацию дерева HTML DOM согласно заданным параметрам. Неосторожный запуск этих функций в рабочей среде может повредить ее окружению и графическому интерфейсу, получив доступ непосредственно к иерархии элементов HTML, составляющих интерфейс. В другом случае, преднамеренно с вредоносной целью написанная функция может получить доступ к объекту, представляющему агента, и передать ложные данные на сервер, сфабриковав выигрышную для студента ситуацию.

Для того, чтобы избежать подобных ситуаций, создается виртуализированная изолированная среда – «песочница» (англ. “sandbox” [4]), предотвращающая попытки получения доступа к вводу-выводу со стороны выполняемых в ней программ.

Система активирует в фоновом режиме обеспечивающие информационную безопасность службы, применяя шаблон проектирования «Наблюдатель». Службы, запущенные в фоновом режиме, подготавливают «песочницу» и параметры изолирован-



ного окружения для проверки ввода пользователя. Пользователь (студент) создает программу на стороне клиента и с помощью консольных команд загружает ее на сервер. Пользователь получает оповещение о том, что задание находится на проверке.

Сервер подтверждает передачу файла и проверяет валидность формы отправки запроса на сервер – то есть полное соответствие полей данных ожидаемым значениям, в числе проверяемых на корректность могут быть такие выражения, как формат файла, идентификаторы авторизации и скрытые токены сессии для определения личности отправителя, а также служебные флаги, определяющие режимы и условия, для которых требуется произвести проверку (групповой или индивидуальный вид задания, тип задания, используемый язык программирования и т.п.).

Если валидность не удалось подтвердить, сервер возвращает сообщение об ошибке в рабочую среду. Если валидность подтверждена, сервер отправляет сигнал фоновым службам, отвечающим за информационную безопасность, и переводит поток, отвечающий за обработку данных, в режим ожидания ответа от служб.

Как только службы получают сигнал от сервера о наступлении события, связанного с передачей файла, они загружают его в «песочницу» и подготавливают тесты, связанные с соответствующим заданием. «Песочница» в изолированной среде запускает программный код и возвращает результат выполнения каждого теста. Если все тесты пройдены успешно, считается, что студент выполнил задание. Если нет, и для не пройденного теста имеются комментарии для пользователя, то они опционально передаются через сервер пользователю в качестве подсказок. В любом случае, полностью успешно пройденные тесты переводят индивидуальное задание и связанный с ним элемент рабочей среды в решенное состояние, если же хотя бы один из тестов не успешен, задание считается не выполненным.

Поток, отвечающий за обработку данных, в обоих случаях получает ответ о результате тестирования от служб и выходит из режима ожидания, передавая информацию на сторону клиента, а пользователь получает подтверждение о том, что его задание успешно или неуспешно прошло процедуру проверки.

Взаимосвязь служб может быть реализована как с помощью механизма межпроцессного взаимодействия, так и с применением интерфейса FFI [2].

Эта процедура повторяется для всех тестов для каждого элемента, для которого обнаружен запрос на проверку решения. Проиллюстрируем этот механизм на конкретном примере.

В примере, приведенном в первом разделе, мы осуществили взаимодействие с элементом «палатка». Скомпилированное индивидуальное задание не учло наш предыдущий опыт, поскольку его не было – это было первое задание, которое выполнялось в рамках цифровой адаптивной платформы. Для того, чтобы выполнить его («собрать дрова»), потребовалось написать функцию, показывающую уровень наших знаний (в данном случае, навыки работы с HTML DOM). Функция реализовала задачу (выборку «подходящих для дров», т.е. соответствующих определенному классу, элементов HTML). Файл с функцией был отправлен на сервер и проверен в «песочнице». Все тесты оказались успешно пройдены, и элемент «палатка» пре-



вратился в элемент «дрова», а индивидуальное задание сменилось на следующее – «зажечь костер». Применяя навыки и знания из смежной области (работа с правилами CSS), повторяем похожую последовательность действий с новой функцией-решением, и после успешного прохождения заданием тестов в изолированной среде сервер меняет элемент «дрова» на «костер». С этим элементом связанных заданий нет, это означает, что индивидуальное задание решено, а элемент «костер» становится элементом для группового задания.

Несмотря на то, что данный блок реализует безопасную взаимосвязь между решенными заданиями и состояниями рабочей среды, решенные и не решенные задания никак не влияют на знания платформы о навыках студентов и не делают платформу адаптивной; поэтому, когда блок «Обеспечение функционирования рабочей среды» завершает свою работу, он передает управление блоку «Обработка результатов», схема которого представлена на рис. 10.

Тесты содержат специальный маркер-идентификатор для дополнительной индексации тестов в базе данных по группам, имеющим одинаковый маркер. Маркер выставляется одинаковым для группы, если потенциальные ошибки, на которые проверяют тесты в группе, имеют схожий характер – например, синтаксические ошибки, отсутствие проверки граничных значений, некорректное условие завершения цикла и т.п. Маркер позволяет, таким образом, объединять задания в базе не только по тематике, но и по характеру ошибок, которые могут проявляться вне зависимости от изучаемой темы (например, синтаксическую ошибку можно допустить и в описании массивов JavaScript, и в описании правил CSS). Кроме того, даже в рамках одной темы, это позволяет детально проработать конкретные недочеты, допущенные студентом в ходе выполнения заданий. Таким образом, осуществляется поиск похожих ошибок, допущенных студентом.

Обработка результатов происходит следующим образом: проверяется общая степень корректности выполнения заданий по каждой теме (отношение правильно решенных заданий к общему числу попыток; для любого учебного задания число попыток всегда не меньше 1, так как если группе или студентам не удалось предъявить ни одного решения за ограниченное время, то все тесты считаются проваленными). Далее проводится поиск по индексированным тестам (поиск похожих ошибок). Для низких значений корректности выполнения принимается решение, что вся тема не проработана участником; для высоких значений исследуется характер ошибок по маркерам групп проиндексированных тестов, принимается решение о предъявлении заданий на конкретную ошибку. Значения степени корректности влияют и на то, с какой вероятностью уже на следующем занятии (на следующей практической паре с применением платформы) будет предъявлено соответствующее задание, а именно, с тем большей вероятностью, чем больше ошибок и недочетов было допущено при проработке соответствующей темы. Но для этого показателя вероятность считается по всей совокупности пройденных занятий таким образом, что, чем больше ошибок допускается на всей совокупности пройденных занятий в заданиях на одну тему, тем большее значение принимает соответствующая вероятность.

Пороговые значения, которые обеспечивают принятие решения, задаются моделью машинного обучения, которая обучается на данных статистики об успехах группы и каждого студента. Эта же модель корректирует оцениваемый уровень навыков каждого студента и группы в целом. Это необходимо для загрузки адаптивно подобранных под уровень навыков заданий из базы для следующего занятия на основе прогноза, формируемого в качестве результата работы модели. Учитываются отобранные задания для профилактики совершенных ошибок. Промежуточные результаты фиксируются в базе данных.

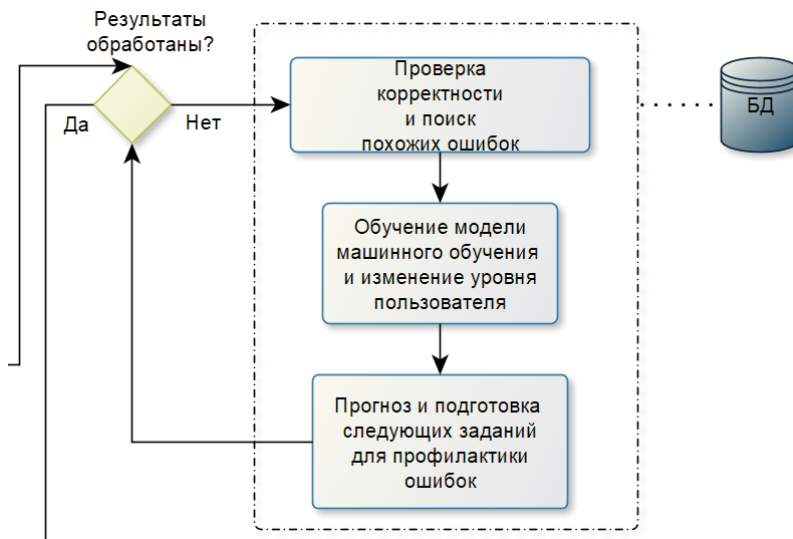


Рис. 10. Структура блока «Обработка результатов»

После того, как все результаты для всех участников и группы обработаны, управление возвращается блоку «Обеспечение функционирования рабочей среды» для подготовки следующего задания. Этот блок, в свою очередь, возвращает управление процессу адаптивной модификации задания для следующего проводимого занятия, и так повторяется цикл взаимодействия компонентов, обеспечивающих адаптивность платформы.

Когда число занятий исчерпано или преподаватель принимает решение о завершении работы платформы, цикл прекращается, и работа адаптивной платформы останавливается.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье были подробно описаны способы применения цифровой адаптивной платформы для обучения программированию с функцией формирования навыков командной работы. Проиллюстрирован характер взаимодействия системы с обучающимся пользователем на примере предъявляемого индивидуального задания и интерфейсов



рабочей среды, предоставляющей необходимый набор функций для обеспечения процесса обучения пользователя. Показано отличие индивидуального и группового задания, их взаимосвязь, а также особенности выполнения группового задания.

Исследованы компоненты, обеспечивающие адаптивность платформы. Продемонстрирован подход к формированию единого задания с учетом уровня навыков обучающихся и характера допущенных ими ошибок в ходе обучения с использованием платформы. Описан подход к обучению платформы, определено место алгоритмов машинного обучения в процедуре адаптивной модификации предъявляемых заданий.

Отдельно описаны аспекты, связанные с обеспечением информационной безопасности при работе с вводимыми обучающимся данными. Детально исследована работа служб платформы, отвечающих за безопасный ввод данных и изолированную обработку результатов.

Таким образом, в статье были изложены существенные детали, связанные с практическим применением цифровой адаптивной платформы для обучения программированию с функцией формирования навыков командной работы.

Литература

1. Попков С.И. Особенности программной реализации цифровой адаптивной платформы для обучения программированию с функцией формирования навыков командной работы – Моделирование и анализ данных. Том 10. № 3. 2020. С. 85–100.
2. Попков С.И. Программная реализация межязыкового взаимодействия на базе динамических библиотек. – Нейрокомпьютеры: разработка, применение. № 3. 2018. С. 39–49.
3. W3C SVG Working Group – URL: <https://www.w3.org/Graphics/SVG/> (дата обращения 10.12.2020 г.)
4. What is a Sandbox (in Software Testing)? – Definition from Techopedia – URL: <https://www.techopedia.com/definition/27681/sandbox-software-testing> (дата обращения 10.12.2020 г.)
5. World Wide Web Consortium (W3C) – URL: <https://www.w3.org> (дата обращения 10.12.2020 г.)



Application of the Digital Adaptive Platform for Learning Programming with the Teamwork Skills Forming Function

Sergey I. Popkov*

Moscow State University of Psychology & Education, Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2566-1262>

e-mail: rslw25@gmail.com

Research is carried out on approaches for the digital adaptive platform for learning programming with the teamwork skills forming function application. The work environment interface and key components that make the platform adaptable are demonstrated. The platform services responsible for information security functions are detailed. An example of the presented task is given.

Keywords: adaptability, digital platform, sandbox, learning computer programming.

For citation:

Popkov S.I. Application of the Digital Adaptive Platform for Learning Programming with the Teamwork Skills Forming Function. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 1, pp. 78–93. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110106> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Popkov S.I. Features of the software implementation of the digital adaptive platform for learning programming with the teamwork skills forming function – *Modelling and Data Analysis*. Vol. 10. № 3. 2020. pp. 85–100 (In Russ.).
2. Popkov S.I. Software implementation of interlingual programming communication based on dynamic link libraries. – *Neurocomputers: development and application*. № 3. 2018. pp. 39–49. (In Russ.)
3. W3C SVG Working Group – URL: <https://www.w3.org/Graphics/SVG/> (req. date 10.12.2020 г.)
4. What is a Sandbox (in Software Testing)? – *Definition from Techopedia* – URL: <https://www.techopedia.com/definition/27681/sandbox-software-testing> (req. date 10.12.2020 г.)
5. World Wide Web Consortium (W3C) – URL: <https://www.w3.org> (req. date 10.12.2020 г.)

***Sergei I. Popkov**, PhD in Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor of the Computer Science Faculty, Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2566-1262>, e-mail: rslw25@gmail.com

Новые средства психологического тестирования

Войтов В.К.*

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6486-3049>
e-mail: vvoi@mail.ru

Шепелева Е.А.**

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9867-6524>
e-mail: e_shep@rambler.ru

Гаврилова Е.В.***

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0848-3839>
e-mail: g-gavrilova@mail.ru

Думин П.Н.****

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9122-252X>
e-mail: duminpn@gmail.com

Ермаков С.С.*****

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4330-2618>
e-mail: ermakovss@mgppu.ru

В статье даётся подробное описание диагностической игровой системы PLines, о которой ранее рассказывалось в журнале, рассмотрены особенности проведения исследования в индивидуальном и парном режимах, объективные показатели деятельности игроков, использование которых в совокупности с фиксацией ряда показателей универсальных учебных действий (УУД):

Для цитаты:

Войтов В.К., Шепелева Е.А., Гаврилова Е.В., Думин П.Н., Ермаков С.С. Новые средства психологического тестирования // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 1. С. 94–108. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110107>



способностей к планированию, анализу и рефлексии, позволяет глубже изучить структуру игрового поведения и его связь с недоступными непосредственному наблюдению личностными качествами. Приведено описание функциональных компонентов системы, описаны способы хранения, извлечения и анализа результатов экспериментов.

Ключевые слова: компьютерные игры, игровое поведение, геймификация, когнитивные способности, психодиагностические методы в образовании.

1. ВВЕДЕНИЕ

В МГППУ на факультете ИТ ведётся большая работа по изучению и совершенствованию форм, режимов и требований к составу компьютеризированных тестов способностей и умений [1, 2, 3]. В настоящее время ведутся работы по расширению ранее неоднократно представлявшей игровой компьютерной системы PLines. Данная статья посвящена особенностям функционирования и реализации версии 3.1 02.03.2020 этой системы. Ранее была опубликована статья, описывающая более подробно аспекты функционирования индивидуальной версии программы PLines [4]. В настоящей статье рассматриваются разработанные средства работы парами и новый вариант индивидуальной версии теста.

В системе PLines реализована игровая механика Lines, дополненная новыми средствами, направленными на осуществление психологической диагностики по результатам оценки игрового процесса. Сырые данные тестирования (параметры игрового взаимодействия) конвертируются в удобную для последующего анализа форму и заносятся в базу данных для последующей обработки.

***Войтов Владимир Кузьмич**, кандидат технических наук, профессор кафедры прикладной информатики и мультимедийных технологий факультета информационных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6486-3049>, e-mail: vvoi@mail.ru

****Шепелева Елена Андреевна**, кандидат психологических наук, старший научный сотрудник сектора диагностики одаренности, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9867-6524>, e-mail: e_shep@rambler.ru

*****Гаврилова Евгения Викторовна**, кандидат психологических наук, научный сотрудник Центра прикладных психолого-педагогических исследований, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0848-3839>, e-mail: g-gavrilova@mail.ru

******Думин Павел Николаевич**, заведующий лабораторией количественной психологии факультета информационных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9122-252X>, e-mail: duminpn@gmail.com

*******Ермаков Сергей Сергеевич**, кандидат психологических наук, доцент кафедры прикладной математики факультета информационных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4330-2618>, e-mail: ermakovss@mgppu.ru



На сегодняшний день система успешно прошла апробацию в исследовании с участием учеников 6-х классов [13, 14], доступ к функционалу приложения осуществляется через веб-интерфейс, что увеличивает доступность инструмента как для исследователей, так и для испытуемых.

2. ВОЗМОЖНОСТИ СИСТЕМЫ

Игра организована по сравнительно простым правилам. На квадратном игровом поле из 81 прямоугольной клетки (9 по горизонтали и 9 по вертикали) в начале хода игрока появляется три шарика окраска которых случайно выбирается из конечного множества вариантов. Далее, ход игрока состоит из передвижения мышкой шарика с одной позиции на другую. Если игрок выстраивает линию из 5 (или более) шариков одного цвета, то эти шарики пропадают с поля, а игрок получает очки, при этом на следующем ходу новые шарики не появляются. Линия может быть горизонтальной, вертикальной или находиться на диагонали. Чем больше одновременно сокращается шариков, тем больше очков получает игрок. Ведется турнирная таблица, и игроки могут посмотреть, какое место они занимают среди всех участников. При реализации системы использовались языки HTML, JavaScript, PHP, C++, библиотека **jQuery**, технология **Ajax** и СУБД **MySQL**.

В данной статье представленная система рассматривается с функциональной и программной точек зрения. Функциональное содержание определяется теми психологическими конструктами, которые система должна диагностировать. В данном случае это универсальные учебные действия, или УУД. В настоящее время в педагогической практике идёт активная разработка различных экспериментальных образовательных программ, направленных, в частности, на развитие у учащихся УУД, необходимых для эффективного обучения в средней школе [12]. Вместе с этим возникает и потребность в диагностике степени их сформированности.

В данной версии системы реализована операционализация трех видов УУД: умственных действий анализа, планирования и рефлексии. Эти УУД могут быть измерены у школьников – пользователей системы – качественно и количественно в процессе индивидуального или парного решения игровых задач.

Необходимо уточнить, что под действиями анализа, планирования и рефлексии понимается их содержательный вид, относящийся к реализации теоретического типа мышления. Данный тип мышления в отечественной психологии был описан В.В. Давыдовым [8] как мышление, направленное на выявление существенных, внутренних особенностей изучаемых объектов или явлений. В процессе теоретического мышления внутренняя деятельность субъекта направлена на поиск существенных признаков или закономерностей, которые могли бы объединить, например, некоторое множество объектов в один общий для них класс. Таким образом, результатом теоретического мышления являются содержательные обобщения, которые могут быть выражены в форме научных понятий. Само формирование и развитие теоретического мышления и отдельных его компонентов – анализа, планирования и рефлексии – в их содержа-



тельной форме является одной из основных целей обучения в системе Д.Б. Эльконина – В.В. Давыдова [9]. Диагностика данных УУД у учеников начальных классов в настоящее время может проводиться по методикам, основанным как на предметном, так и на предметном содержании [10, 11].

Разработанная система игровой диагностики PLines сконструирована таким образом, что позволяет диагностировать степень сформированности действий содержательного анализа, планирования и рефлексии учащихся средних общеобразовательных школ на этапе окончания начальной и средней школы. Ведь в отличие от стандартной компьютерной системы 'LINES', в которой шарики появляются в случайном порядке, ее модифицированная версия предполагает закономерное предъявление стимульного материала (шариков) в соответствии с заданными администратором принципами (правилами). Способность выявить закономерность появления шариков (анализ), далее учитывать ее принципы в своих игровых действиях (планирование) и заметить снижение своей игровой продуктивности при смене одной закономерности на другую (рефлексия) могут быть операционализированы на основе фиксируемых параметров игровой деятельности. То есть, представленную систему можно рассматривать как диагностический инструмент УУД нового типа – основанного именно на надпредметном содержании.

В системе поддерживается три вида пользователей: **обычный пользователь** (игрок, тестируемый), **администратор-психолог**, **системный администратор**. **Администратор-психолог** имеет возможность настроить важные параметры игры. К ним относятся, например, такие параметры как ограничения на некоторые временные характеристики, количество используемых цветов для шариков, определение различных подсказок. Администратор-психолог имеет доступ к результатам тестирования, но не может их изменить. Он может выбрать интересующие его данные из базы данных для последующей обработки. Например, он может выбрать данные по некоторой группе пользователей для определенного периода времени. Эти данные затем с помощью специальной программы подготавливаются для требуемой статистической обработки. **Администратор-психолог** может также назначить или замаскировать отображение некоторых кнопок или полей.

Системный администратор создает базу данных, следит за правильностью занесения и обработки информации.

3. ИНДИВИДУАЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

Более подробно индивидуальная версия теста изложена в статье [4]. На момент выхода статьи интерфейс последней версии программы PLines, доступен по URL – <http://it-span.mgppu.ru/plines3/>, веб-приложение работает в многопользовательском режиме, доступ к основным функциям возможен после авторизации.

Наравне с традиционными игровыми правилами (по правилам Lines генерация новых шариков осуществляется рандомизировано), могут использоваться установ-



ленные психологом порождающие паттерны, которые обеспечивают при сохранении ряда стохастических аспектов, исполнение определённых закономерностей в расстановке шариков, предваряющей каждый ход игрока. В обоих случаях вся информация о ходе игры заносится в базу данных для последующей статистической обработки.

При использовании закономерностей игровое поле делится на две части (верхняя – нижняя или левая – правая). В этом случае в одной части поля шарики располагаются в соответствии с введенными администратором-психологом правилами, а в другой части шарики появляются в случайном порядке.

При каждом ходе игрока накапливается статистическая информация о количестве набранных очков, числе сокращенных шариков, разность времени между ходами, число шариков в окне на момент хода.

В конце игры вся эта информация заносится в базу данных.

На Рис. 1 показан вид игрового поля индивидуальной версии при игре без закономерностей.

На Рис. 2. отображен пример возможного вида игрового поля индивидуальной версии при игре с закономерностями.

Перед игрой тестируемых предупреждают о наличии или отсутствии закономерностей в игровой сессии.

4. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Во время тестирования накапливается статистическая информация о прохождении игры.

В конце игры она заносится в базу данных. Сохраняются следующие параметры:

- начало сеанса;
- начало и идентификатор каждой закономерности;
- идентификаторы выбранных пунктов меню опроса (смотрите ниже);
- для каждого хода игрока сохраняется четыре величины:
 - счет (набранное количество очков);
 - число сокращенных шариков;
 - временная разность начала ходов в 10-х долях секунды;
 - число шариков в окне.

Пример. Вид фрагмента сохраненной статистической информации для двух последовательных ходов.

:40,40,14,25:52,46,19,19:

- Сначала счет (набранное количество очков) и число уже убранных шариков было равно 40 (первые два числа
- ход длился 1,4 секунды, и после него, вместе с появившимися тремя новыми шариками, на поле осталось 25 шариков.
- Затем на следующем ходе сократилось 6 шариков. Это дало 12 очков.
- Время на ход составило 1,9 секунды. На экране осталось $25 - 6 = 19$ шариков.

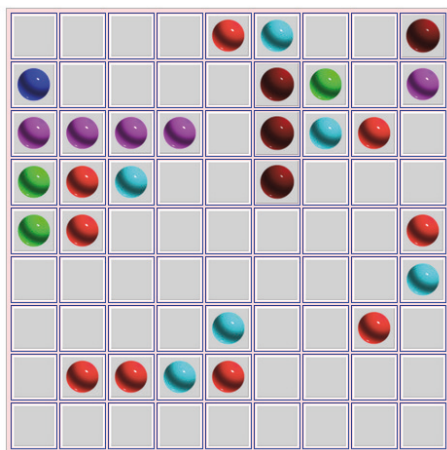


Рис. 1. Вид игрового поля индивидуальной версии игры без использования закономерностей

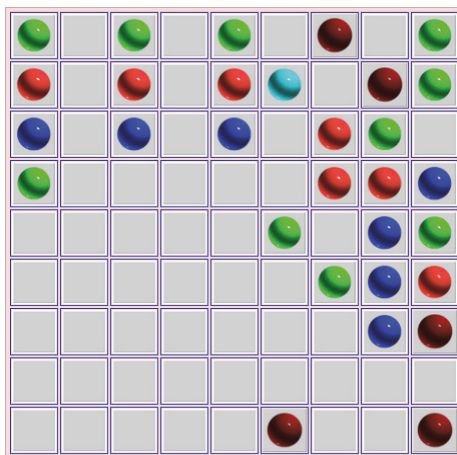


Рис. 2. Пример вида игрового поля индивидуальной версии при игре с закономерностями

5. ВЕРСИЯ ДЛЯ РАБОТЫ ПАРАМИ

В рассмотренной выше индивидуальной версии через интернет одновременно могло работать много пользователей, но каждый из них работал со своей реализацией программы. При работе парами игроки также работают через интернет. Пара играет в одну общую игру. У каждого игрока имеется только один партнер. При игре парами игроки ходят по очереди. При этом игрок может запретить или разрешить выполнить ход партнеру. Пар может быть много. Уже проводилось тестирование, когда одновременно в системе работало более 9 пар. Это более 18 игроков.

В такой игре два игрока пары играют в одну игру (как два шахматиста играют одну партию). В таком режиме поддерживаются два экрана. Пользователи играют на разных компьютерах и осуществляют ход по очереди.

Поддерживается два способа организации пар:

1. Принудительный принцип. Администратор-психолог в специальном режиме создает таблицу с именами для пар игроков. Далее он (принудительно) назначает эти имена игрокам.
2. Случайный принцип. Здесь возможны два варианта:
 - а) игрок регистрируется в системе под неким своим именем. Система находит первого свободного игрока и образует пару. Если свободного игрока нет, то система переходит в состояние ожидания, и затем при появлении первого свободного игрока образуется пара;
 - б) как и в пункте 1 администратор-психолог в специальном режиме создает таблицу с именами для пар игроков, но имена партнерам назначаются случайным образом.



Пользователи пары совместно работают над одной реализацией игры. Для них на экране компьютера отображаются данные их совместной игры. После образования пары, например, между пользователями t1 и t2, на экране пользователя t1 появляется строка “t1 -> t2”, а у пользователя t2 появляется строка “t2 -> t1”. После образования пары запускается таймер, отсчитывающий время для работы с первой закономерностью или тренировочной игрой.

Также как и при индивидуальной версии, администратор-психолог перед тестированием имеет возможность задавать используемые закономерности. Список этих закономерностей одинаков для обоих игроков пары. Прежде чем приступить к работе с закономерностями, игрокам пары предоставляется возможность потренироваться (запускается тренировочная игра). Эта игра рассматривается как нулевая закономерность. Игрок может отказаться от тренировочной игры и перейти к основной игре, (к первой закономерности из назначенного администратором-психологом списка). В этом случае партнеру посылается соответствующее сообщение, и партнер автоматически переводится в режим игры с первой закономерностью из назначенного администратором-психологом списка.

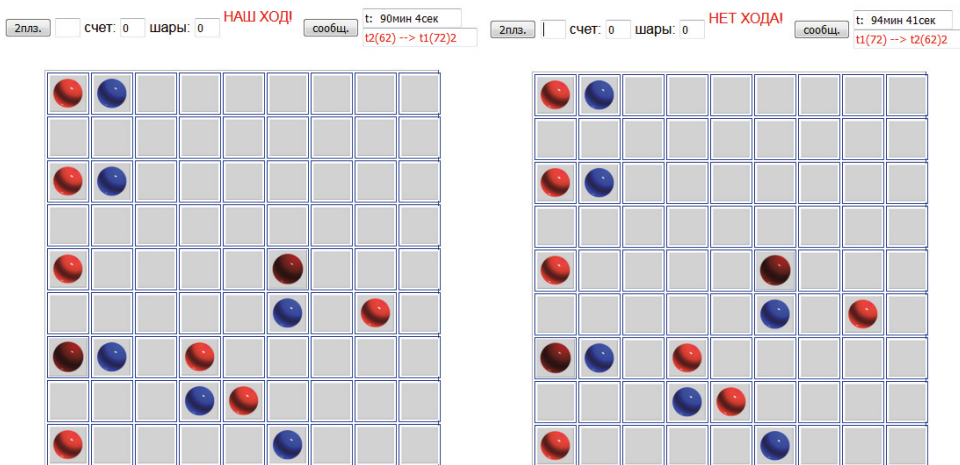


Рис. 3. Вид экранов пользователей пары (t1 и t2), играющей при многопользовательском режиме. Право хода у пользователя “t2”

6. ПЕРЕДАЧА ДАННЫХ МЕЖДУ ИГРОКАМИ

На Рис. 3 изображены экраны пользователей пары, играющей в многопользовательском режиме. Соединение установлено между пользователями “t1” и “t2”. В данном случае право хода у пользователя “t2”. После того, как пользователь с правом хода сделает ход, у него появляется надпись “НЕТ ХОДА!”, а у его партнера появляется надпись “НАШ ХОД! ”. При этом содержимое окна от сделавшего ход игрока переносится партнеру. Информация о виде общего окна хранится в каждом компью-

тере пары. Она модифицируется после каждого хода партнеров. Для реализации обмена данными применяются библиотека jQuery технология Ajax . В технологии Ajax используется “обратный вызов”, что позволяет избежать дрожания в верхней строке экрана, которое возникает, если не использовать “обратный вызов”.

В системе поддерживается несколько таймеров, которые выполняют следующие функции:

- Контроль времени выполнения всего теста;
- Контроль времени тренировки (разминки);
- Контроль времени работы с каждой закономерностью;
- Контроль передачи данных от одного игрока к другому.

Значение второго и третьего таймеров отображается на экране. Оно показывает, сколько времени осталось до конца данного этапа тестирования.

Последний таймер используется при передаче данных от одного игрока другому.

Игроки пары могут передавать сообщения друг другу с помощью специальных окон общения.

Такое окно игрок может открыть только после создания соединения (образования пары).

На рис. 4 изображены два окна для обмена сообщениями между игроками **a1** и **a2**. Внизу каждого окна воспроизводится лента сообщений, отправленных и полученных.

Для пользователей, которые не хотят или не могут набирать текст сообщения, подготовлено специальное меню из готовых сообщений (см. Рис. 5), помогающих обсудить и сделать правильный ход. Это меню вызывается при нажатии кнопки “r”.

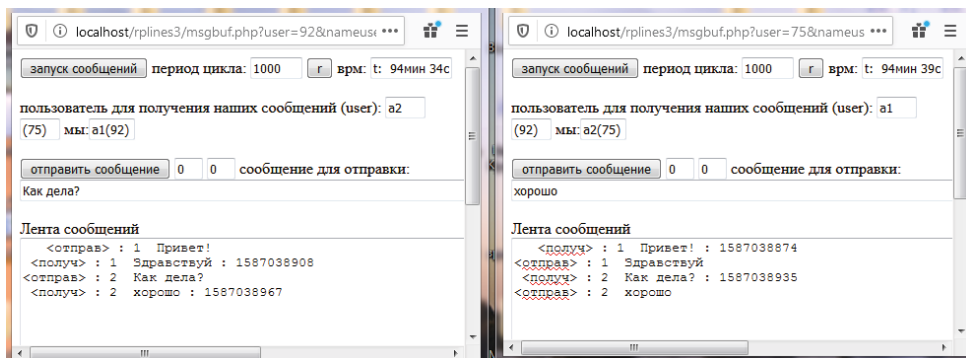


Рис. 4. Обмен сообщениями между пользователями **a1** и **a2**.
Числовое значение указывает время передачи сообщения

При обмене ходами игроков система поддерживает следующие команды:

- сделан ход;
- разрешение хода;
- запрет хода партнера;
- уведомление партнера о переходе в режим закономерностей.

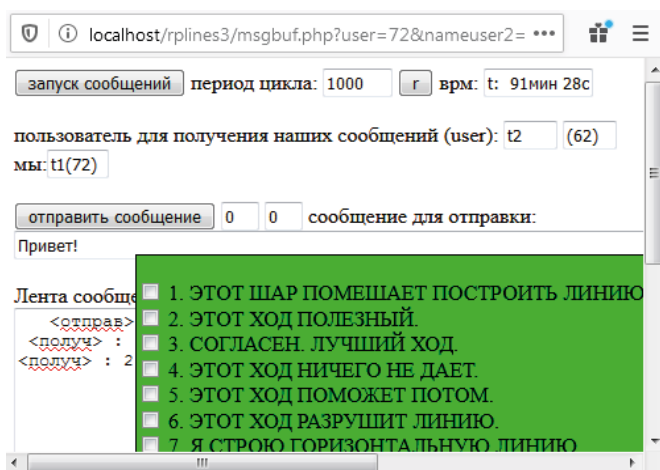


Рис. 5. Меню из готовых сообщений для передачи.
Оно появляется при нажатии на кнопку “r”

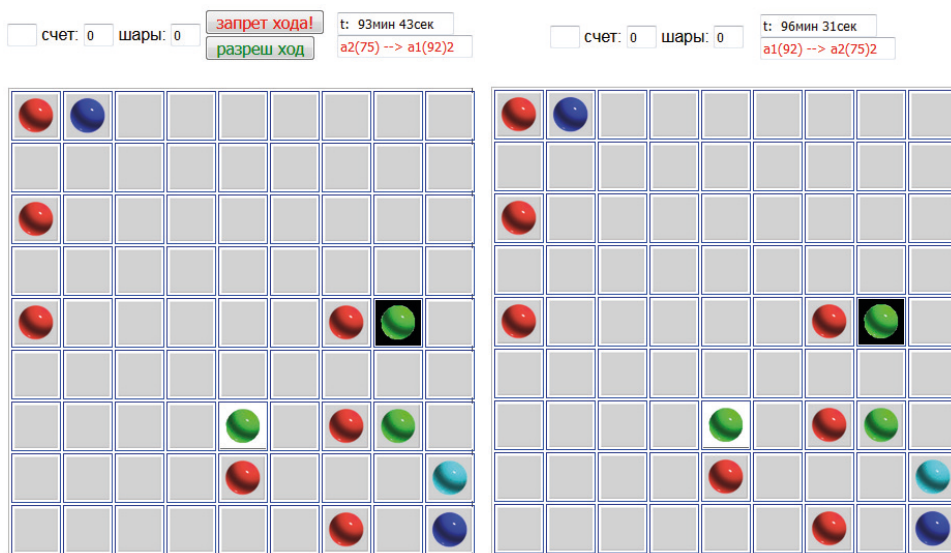


Рис. 6. Предложение хода игроком a1 (левый игрок) игроку a2 (правый игрок).
У игрока a2 есть две возможности – запретить или разрешить ход

При выполнении хода у передвигаемого шарика появляется белый фон, и шарик остается на своем месте. На том месте, куда игрок передвигает шарик, появляется копия передвигаемого шарика на черном фоне. У партнера появляется копия игрового поля и две кнопки: “запрет хода” и “разрешение хода”. При нажатии кнопки “разрешение хода” ход выполняется, и право хода переходит к нажавшему эту кнопку игроку. При нажатии кнопки “запрет хода” ход отменяется. У инициировавшего ход



Данные, содержащие информацию о диалогах между игроками пар, помещаются в специальную таблицу во время игры.

Поскольку администратор-психолог перед тестированием может задавать большой промежуток времени для тестирования и несколько закономерностей, данные тестирования обычно имеют большой размер для каждого игрока. Они помещаются в специальное поле таблицы базы данных типа **BLOB** для хранения больших данных. Для обработки этих данных реализован специальный конвертор (на языке C), который переводит полученные данные в таблицы Excel. Информация о диалогах между игроками пар также конвертируется в таблицы Excel.

Отчетами занимается Администратор-психолог. Он входит в систему под своим именем и паролем и открывает окно “Административная подсистема”, в котором он задает критерий поиска результатов тестирования. Это диапазон дат, название группы тестируемых и диапазон имен пользователей. В результате обычно выдается большой массив данных.

Затем Администратор-психолог должен вызвать программу конвертор, которая переводит полученные данные в табличный вид.

7. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕСТИРОВАНИЯ

Для обработки результатов тестирования созданы специальные средства. Администратор-психолог входит под своим именем и паролем в систему и открывается окно “Административная подсистема” (см. Рис. 7). Далее он задает параметры для поиска статистических данных в базе. На Рис. 7 задан поиск данных тестирования с даты 21-Nov-2019 до даты 22-Nov-2019. Одновременно указано осуществлять поиск имен пользователей от t1 по t16. Можно также задавать название группы пользователей. Для получения данных следует нажать на кнопку “просмотр результатов”.

Кнопки во второй снизу строке позволяют:

- Просмотреть содержание буферов обмена данными;
- Просмотреть установленные связи пользователей;
- Просмотреть сообщения, передаваемые пользователями при работе парами.

Полученные данные обрабатываются с помощью специальной программы конвертора, написанной на языке C. Пример фрагмента представления данных для работы парами после конвертора приведен на Рис. 8. Эти данные уже можно обрабатывать с помощью различных статистических методов.

Здесь определено следующее:

- t1, t2, t3, ... – номера хода;
- z104, z106, z107 – идентификаторы закономерностей;
- команды: «-105» – сделан ход, «-106» – разрешение хода, «-108» – запрет хода партнера

Для каждого хода, для каждой закономерности в таблице содержится четыре отрицательных числа, значения которых описаны выше в разделе “Статистическая информация” (см. пример).



Отрицательные числа означают номера команд (см. выше).

Административная подсистема

группа: d1: 21-Nov-2019 d2: 22-Nov-2019
 ник1: ник2:

Рис. 7. Вид окна Административной подсистемы

NT	зак	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7	t8	t9	t10	t11	t12	t13	t14
1.ник=t10.сеанс:3 время:2113	z103 счет: 15	0	0	5	5	5	5	10	10	10	10	10	10	15	15
нач:1584177997 кон:1584180110	шары: 15	0	0	5	5	5	5	10	10	10	10	10	10	15	15
	время: 1816	287	69	105	45	190	40	204	116	132	168	85	75	143	124
	все шары	4	6	5	7	11	13	9	11	15	17	21	23	19	19
	z104 счет: 90	0	0	5	5	5	5	5	5	10	10	15	15	15	15
	шары: 54	0	0	5	5	5	5	5	5	10	10	15	15	15	15
	время: 6070	195	749	56	165	175	137	71	52	158	52	701	39	187	193
	все шары	4	7	4	8	10	14	14	16	12	14	10	12	16	18
	z106 счет: 90	0	0	0	5	5	5	5	5	5	5	10	15	15	20
	шары: 54	0	0	0	5	5	5	5	5	5	5	10	15	15	20
	время: 6560	568	32	109	51	324	56	214	56	177	43	183	47	162	148
	все шары	8	10	14	8	12	14	18	20	24	26	22	16	20	14
	z107 счет: 137	95	100	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105
	шары: 95	59	64	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69
	время: 5879	240	30	128	31	282	39	419	61	174	210	46	184	56	354
	все шары	27	21	17	19	23	25	29	31	35	35	37	41	43	47
	z103 счет: -105	-105	-106	-105	-106	-105	-106	-105	-106	-105	-106	-105	-106	-105	-105
	шары: 15	0	0	5	5	5	5	10	10	10	10	10	15	15	15
	время: 1732	287	54	105	97	190	112	204	71	132	46	85	82	143	124
	все шары	4	7	5	8	11	14	9	12	15	18	21	24	19	19

Рис. 8. Фрагмент представления данных при работе парами после конвертора

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью данной системы было проведено несколько сеансов тестирования через Интернет (индивидуальное и парами) студентов и школьников младших классов в конце 2019 и 2020 г. При тестировании парами система показала нормальное функционирование. Число одновременно работающих пар доходило до 8. Полученные данные были успешно сохранены в базе данных. Тестирование начиналось практически одновременно. Общее время тестирования составляло не менее 40 минут.

При индивидуальном тестировании объем сохраняемых данных в базу данных был больше, так как тестируемые выполняли больше ходов. При одновременном тестировании 16 школьников во время записи накопленной информации в базу данных было потеряно два фрагмента. При одновременном тестировании 10–12 человек потерь не было.

Система итерационно развивается в соответствии с запросами специалистов психологов, реализуется поддержка новых механик игрового процесса, позволяющих в ходе игровой сессии измерять новые психологические параметры.



Литература

1. *Войтов В.К., Косихин В.В., Ушаков Д.В.* Рабочая память как перспективный конструкт когнитивной психологии и методы его измерения // *Моделирование и анализ данных*. 2015. № 1. С. 57–78.
2. *Войтов В.К.* Расчет значений сложностей заданий для адаптивного теста / В.К. Войтов // *Экспериментальная психология*. 2013. Т.6, № 2. С. 120–128.
3. *Войтов В.К.* Особенности программной реализации адаптивного теста общего интеллекта Берглинга-Холлинга. – *Моделирование и анализ данных*, 2013, № 1, с. 110–115.
4. *Войтов В.К.* Использование игры PLines для психологического тестирования. *Моделирование и анализ данных* 2018. № 1. С. 39–51 ISSN: 2219–3758 / 2311–9454 (online).
5. *Войтов В.К.* Многопользовательские системы психологического тестирования на основе компьютерных игр. В книге: *Нейрокомпьютеры и их применение XVI Всероссийская научная конференция : тезисы докладов*. 2018. С. 225–226.
6. *Хольцнер С.* jQuery. Практическое применение. / Стивен Хольцнер. М.: Эксмо, 2010. – 334 с.
7. *Эспозито Д.* Разработка веб-приложений с использованием ASP.net и Ajax. СПб.: Питер. 2012. – 400 с.
8. *Давыдов В.В.* Теория развивающего обучения. Москва: ИНТОР, 1996. – 544 с.
9. *Давыдов В.В.* О понятии развивающего обучения. Сборник статей. Томск: «Пеленг», 1995. – 144 с.
10. *Гуружанов В.А.* К вопросу о предметной диагностике теоретического мышления детей в развивающем обучении // *Психологическая наука и образование* – 1997. Том 2. № 4. С. 103–106.
11. *Зак А.З.* Диагностика теоретического мышления у младших школьников. *Психологическая наука и образование* – 1997. Том 2. № 2. С. 36–41.
12. *Ермаков С.С.* Зарубежные образовательные программы для одаренных учащихся [Электронный ресурс] *Современная зарубежная психология*. 2014. Том 3. № 2. С. 72–83. URL: <https://psyjournals.ru/jmfp/2014/n2/70109.shtml> (дата обращения: 28.05.2020).
13. *Марголис А.А., Куравский Л.С., Шепелева Е.А., Гаврилова Е.В., Петрова Г.А., Войтов В.К., Юркевич В.С., Ермаков С.С.* Возможности компьютерной игры «PLines» как инструмента диагностики комплексов когнитивных способностей школьников [Электронный ресурс] // *Современная зарубежная психология*. 2018. Том 7. № 3. С. 38–52. doi:10.17759/jmfp.2018070304.
14. *Марголис А.А., Куравский Л.С., Войтов В.К., Гаврилова Е.В., Ермаков С.С., Петрова Г.А., Шепелева Е.А., Юркевич В.С.* Интеллект, креативность и успешность решения задач учащимися среднего школьного возраста в компьютерной игре «PLines» // *Экспериментальная психология*. 2020. Том 13. № 1. С. 122–137. doi:10.17759/exppsy.2020130109



New Psychological Testing Tools

Vladimir K. Voitov*

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6486-3049>
e-mail: vvoi@mail.ru

Elena A. Shepeleva**

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9867-6524>
e-mail: e_shep@rambler.ru

Eugene V. Gavrilova***

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0848-3839>
e-mail: g-gavrilova@mail.ru

Pavel N. Dumin****

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9122-252X>
e-mail: duminpn@gmail.com

Sergey S. Ermakov*****

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4330-2618>
e-mail: ermakovss@mgppu.ru

The article provides a detailed description of the diagnostic game system PLines, which was previously described in the journal, discusses the features of conducting research in individual and pair modes, objective indicators of player activity, the use of which, together with the recording of a number of indicators of universal learning activities (ECD): the ability to plan, analyze and reflect, allows you to study more deeply the structure of game behavior and its relationship with personal qualities that are inaccessible to direct observation. The functional components of the system are described, and the methods of storing, extracting, and analyzing the results of experiments are described.

Keywords: computer games, gaming behavior, gamification, cognitive abilities, methods of psychological diagnostic in education.

For citation:

Voitov V.K., Shepeleva E.A., Gavrilova E.V., Dumin P.N., Ermakov S.S. New Psychological Testing Tools. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 1, pp. 94–108. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110107> (In Russ., abstr. in Engl.).

***Vladimir K. Voitov**, candidate of technical Sciences, Professor, Department of applied Informatics and multimedia technologies, faculty of information technologies, MSUPE, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6486-3049>, e-mail: vvoi@mail.ru



References

1. Voitov V.K., Kosikhin V.V., Ushakov D.V. Rabochaya pamyat' kak perspektivnyi konstrukt kognitivnoi psikhologii i metody ego izmereniya. Modelirovanie i analiz dannykh. 2015. № 1. p. 57–78.
2. Voitov, V.K. Raschet znachenii slozhnosti zadaniy dlya adaptivnogo testa. Ehksperimental'naya psikhologiya. 2013. T.6, № 2. p. 120–128.
3. Voitov V.K. Osobennosti programmnoi realizatsii adaptivnogo testa obshchego intellekta Bertlinga-Khollinga. – Modelirovanie i analiz dannykh, 2013, № 1, p. 110–115.
4. Voitov V.K. Ispol'zovanie igry PLines dlya psikhologicheskogo testirovaniya. Modelirovanie i analiz dannykh 2018. № 1. p. 39–51 ISSN: 2219–3758 / 2311–9454 (online).
5. Voitov V.K. Mnogopol'zovatel'skie sistemy psikhologicheskogo testirovaniya na osnove komp'yuternykh igr. V knige: Neirokomp'yutery i ikh primenenie XVI Vserossiiskaya nauchnaya konferentsiya : tezisy dokladov. 2018. p. 225–226.
6. Khol'tsner S. jQuery. Prakticheskoe primenenie. . Stiven Khol'tsner. M.: Ehksmo, 2010. – 334 p.
7. Ehspozito D. Razrabotka veb-prilozhenii s ispol'zovaniem ASP.net i Ajax. SPb.: Piter. 2012. – 400 p.
8. Davydov V.V. Teoriya razvivayushchego obucheniya. Moskva: INTOR, 1996. – 544 p.
9. Davydov V.V. O ponyatii razvivayushchego obucheniya. Sbornik statei. Tomsk: “Peleng”, 1995. – 144 p.
10. Guruzhapov V. A. K voprosu o predmetnoi diagnostike teoreticheskogo myshleniya detei v razvivayushchem obuchenii . Psikhologicheskaya nauka i obrazovanie – 1997. Tom 2. № 4. p. 103–106.
11. Zak, A.Z. Diagnostika teoreticheskogo myshleniya u mladshikh shkol'nikov. Psikhologicheskaya nauka i obrazovanie – 1997. Tom 2. № 2. p. 36–41.
12. Ermakov S.S. Zarubezhnye obrazovatel'nye programmy dlya odarennykh uchashchikhsya [Elektronnyi resurs] Sovremennaya zarubezhnaya psikhologiya. 2014. Tom 3. № 2. p. 72–83. URL: <https://psyjournals.ru/jmfp/2014/n2/70109.shtml> (data obrashcheniya: 28.05.2020).
13. Margolis A.A., Kuravskii L.S., Shepeleva E.A., Gavrilova E.V., Petrova G.A., Voitov V.K., Yurkevich V.S., Ermakov S.S. Vozmozhnosti komp'yuternoj igry «PLines» kak instrumenta diagnostiki kompleksov kognitivnykh sposobnosti shkol'nikov [Elektronnyi resurs]. Sovremennaya zarubezhnaya psikhologiya. 2018. Tom 7. № 3. p. 38–52. doi:10.17759/jmfp.2018070304.
14. Margolis A.A., Kuravskii L.S., Voitov V.K., Gavrilova E.V., Ermakov S.S., Petrova G.A., Shepeleva E.A., Yurkevich V.S. Intellekt, kreativnost' i uspešnost' resheniya zadach uchashchimysya srednego shkol'nogo vozrasta v komp'yuternoj igre «PLines». Ehksperimental'naya psikhologiya. 2020. Tom 13. № 1. p. 122–137. doi:10.17759/exppsy.2020130109

****Elena A. Shepeleva**, candidate of psychological Sciences, senior researcher of the gifted diagnostics sector, MSUPE, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9867-6524>, e-mail: e_shep@rambler.ru

*****Eugene V. Gavrilov**, Ph. D., research associate, Center for applied psychological and educational research, Doctor of Education, MSUPE, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0848-3839>, e-mail: g-gavrilova@mail.ru

******Pavel N. Dumin**, head of laboratory of quantitative psychology at the faculty of information technology, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9122-252X>, e-mail: duminpn@gmail.com

*******Sergey S. Ermakov**, candidate of psychological Sciences, associate Professor, Department of applied mathematics, faculty of information technology, MSUPE, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4330-2618>, e-mail: ermakovss@mgppu.ru

Моделирование и анализ данных 2021. Том 11. № 1.

Научный журнал

Издаётся с 2011 года

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:

г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий

Тел.: +7 (499) 167-66-74

E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.

Свидетельство о регистрации средств массовой информации

ПИ № ФС77-52058 от 7 декабря 2012 года

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (online)

Подписано в печать: 30.04.2021.

Формат: 70*90/16. Бумага офсетная.

Гарнитура Times. Печать цифровая.

Усл. печ. п. 6,8. Усл.-изд. л. 7,5.

Тираж 500 экз.