

№2
2019

2

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ



2019

ISSN 2219-3758

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

MODELLING AND DATA ANALYSIS

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор – Л.С. Куравский

Заместители главного редактора – С.Д. Кулик, А.В. Пантелеев

Члены редакционной коллегии – К.К. Абгарян, Г.Г. Амосов, М.В. Воронов, Е.Л. Григоренко (*США*), В.К. Захаров, А.И. Кибзун, Л.М. Либкин (*Великобритания*), В.Р. Милов, А.В. Наумов, Д.Л. Ревизников, Х. Холлинг (*Германия*), Д. Фрэнсис (*США*), К.В. Хорошенков (*Великобритания*), Г.А. Юрьев

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Председатель редакционного совета – Г.Г. Амосов

Члены редакционного совета – В.А. Барабанщиков, П. Бентлер (*США*), А.В. Горбатов, Л.С. Куравский, Л.М. Либкин (*Великобритания*), А.А.Марголис, В.В. Рубцов, Д.В. Ушаков, Д. Фрэнсис (*США*)

Ответственный секретарь – Н.Е. Юрьева

Издаётся с 2011 года

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:

г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий

Тел.: +7 (499) 167-66-74

E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.

Свидетельство о регистрации средств массовой информации

ПИ № ФС77-52058 от 7 декабря 2012 года

ISSN 2219-3758

© ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», 2019

Все права защищены. Любая часть этого издания не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения редакционной коллегии.

Правила оформления рукописей, направляемых в редакцию журнала, высылаются по запросу по электронной почте.

СОДЕРЖАНИЕ CONTENTS

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL MODELLING

Оптимизационные математические модели мирного и военного подчинительных взаимодействий двух государств

В.К. Захаров

Optimization mathematical models of the peaceful and military subordinating interactions of two states

V.K. Zakharov

4

Численный анализ диффузионной аппроксимации одноканальной системы массового обслуживания с управляемыми параметрами загрузки и обработки

К.В. Семенихин, Ю. С. Иванова

Numerical analysis of diffusion approximation for a single-channel queueing system with controlled access and service rates

K.V. Semnikhin, Yu.S. Ivanova

21

Гарантирующее оценивание параметров одномерной модели движения по вероятностному критерию при наличии унимодальных помех

А.С. Архипов, К.В. Семенихин

Guaranteed parameter estimation by probabilistic criterion for one-dimensional motion model with unimodal observation noise

A.S. Arkhipov, K.V. Semnikhin

31

АНАЛИЗ ДАННЫХ DATA ANALYSIS

Моделирование динамики финансового индекса RTSI

Е.А. Кускова, Ю.С. Кан

Modelling the dynamics of the RTSI index

E.A. Kuskova, Yu.S. Kan

39

Некоторые методы снижения размерности для вертикального разреза скорости звука в океане

В.О. Захаров

Some methods of reducing the dimension for a vertical cut of the speed of sound in the ocean.

V.O. Zakharov

48

Методы определения среднего в системах контроля процесса обучения

Н.Г. Горбунов, А.В. Осокин

Methods of determining the average in the learning process control system

N.V. Gorbunov, A.V. Osokin

57

Оценка рыночной стоимости квартир с помощью методов регрессионного анализа

А.Б. Горобцова

Assessment of the market value of apartment using regression analysis

A.B. Gorobtsova

63

**ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ
CONTROL THEORY**

Численный алгоритм поиска субоптимального управления дискретной стохастической системой с вероятностным критерием

А.Н. Тарасов, В.М. Азанов

Numerical algorithm for finding a suboptimal control of a discrete stochastic system with a probability criterion

A.N. Tarasov, V.M. Azanov

73

Алгоритм внешней аппроксимации выпуклого множества допустимых управлений для дискретной системы с ограниченным управлением

Д.Н. Ибрагимов, Е.Ю. Порцева

The algorithm of external approximation of a convex set of admissible controls for a discrete system with bounded control

D.N. Ibragimov, E.Yu. Portseva

83

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
OPTIMIZATION METHODS**

Метаэвристические методы решения двухуровневой стохастической задачи размещения предприятий

С.В. Иванов, А.Н. Пономаренко

Metaheuristic methods for solving a bilevel stochastic facility location problem

S.V. Ivanov, A.N. Ponomarenko

99

**КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ
SOFTWARE**

Алгоритм реализации расчетов воздействия космического мусора на космические аппараты

В.С. Асатурьян, Д.И. Григорьев, Э.Р. Юмагулов

Algorithm for calculating the effects of space debris on spacecraft

V.S. Asaturjan, D.I. Grigorev, E.R. Jumagulov

109

**АВТОРЫ
AUTHORS**

115

МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 004.942

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МИРНОГО И ВОЕННОГО ПОДЧИНИТЕЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ДВУХ ГОСУДАРСТВ

В.К. Захаров

На основе созданной ранее автором оптимизационной динамической математической модели одного отдельно взятого государства строятся оптимизационные динамические математические модели мирного торгово-валютного и военного наступательного подчинительных взаимодействий двух государств в пользу одного из них.

Some optimization dynamic mathematical models of the peaceful trade-currency and military aggressive subordinating interactions of two States in favor of one of them are constructed on the base of constructed earlier by the author optimization dynamic mathematical model of a State.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Оптимизационная динамическая математическая модель, государство, взаимодействие двух государств, мирное торгово-валютное взаимодействие, военное наступательное взаимодействие.

ДЛЯ ЦИТАТЫ

В.К. Захаров. Оптимизационные математические модели мирного и военного подчинительных взаимодействий двух государств // Моделирование и анализ данных. 2019. №2. С. 4-20.

V.K. Zakharov. Optimization mathematical models of the peaceful and military subordinating interactions of two states. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis (Russia). 2019, no.2, pp.4-20

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к созданию математической модели войны возник у автора после выхода в свет известной книги [1] под редакцией академика Н.Н. Моисеева, посвящённой **имитационному** моделированию Пелопонесской войны.

Однако для создания **общей оптимизационной** модели войны между государствами потребовалось сначала создать *общую математическую оптимизационную модель государства в широком смысле (т.е. как государства-страны)*. Такая модель была построена и развита автором в статьях [2, 4, 5] и книгах [3, С. 153-168], [6, С. 330-353], [7, С. 393-399]. Математическое исследование этой модели на существование оптимального управления было проведено Кузенковым О.А. в статьях [2, 4, 5].

Продвижение же к построению на этой основе *общей математической оптимизационной модели взаимодействия нескольких государств* наступило только в 2018 году, когда удалось математически формализовать **мирное и военное подчинительные взаимодей-**

ствия двух государств [8]. Именно эти виды взаимодействия оказались наиболее заметными в истории 20 и 21 веков.

Цель и мирного, и военного подчинительного взаимодействия одна и та же. Это – **достижение наибольшего расхождения** совокупных достояний взаимодействующих государств к концу некоторого промежутка времени **в пользу одного из них**. Однако способы управления при этих взаимодействиях могут качественно отличаться друг от друга.

В первой части рассматривается математическая модель **мирного торгово-валютного** взаимодействия посредством согласованного и не согласованного управления в обоих государствах, оптимально-подчинительного **в пользу одного из них**. Во второй части рассматривается математическая модель **военного наступательного** взаимодействия посредством одностороннего управления со стороны **нападающего государства**, оптимально-подчинительного **в его пользу**.

Статья является чисто концептуальной. Никаких теоретических и практических способов решения поставленных оптимизационных задач в ней не рассматривается. Естественно, что приведённые динамические оптимизационные математические модели мирного и военного подчинительных взаимодействий двух государств опирается на разработанную ранее в указанных выше работах автора соответствующую модель управляемой деятельности одного отдельно взятого государства.

2. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОДНОГО ГОСУДАРСТВА

Для того, чтобы сделать статью замкнутой в себе, приведём основные сведения из статей [2, 4, 5].

УСТРОЙСТВО И ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ГОСУДАРСТВА

Каждое государство *является сложным трёхуровневым системным обществом*, устроенным в виде совокупности *основных (под)систем*, связанных друг с другом в единую систему и зависящих друг от друга так, что без каждой из этих систем государство существовать не может. **Основными системами государства** являются: *содержательная, учётная, обеспечительная, совокупная распорядительная и верховная системы*.

Содержательная система С осуществляет *метааграрный (изымающий из природной среды), индустриальный (перерабатывающий) и сервисный (обслуживающий) способы жизнедеятельности*. *Учётная система Е* осуществляет производство, сбор, хранение и раздачу денег, статистических сведений и т.п. *Обеспечительная система D* обеспечивает порядок, охрану, законность, нравственность и пр. *Распорядительные системы F, G и H* ведают (управляют) деятельностью содержательной, учётной и обеспечительной систем, соответственно. Поэтому их можно именовать *содержательно-распорядительной, учётно-распорядительной и обеспечительно-распорядительной системами*, соответственно. Они образуют *совокупную распорядительную систему*. *Верховная (управляющая) система P* управляет деятельностью совокупной распорядительной системы.

Государство является открытой системой с тремя частями бытийной среды, называемыми *природной средой A₁, зарубежной надприродной средой A₂ и своей теневой средой A₃*. Они обобщённо именуются *средами государства*.

Любая мысленно отмеченная часть государства и его внутренней природной среды называется *достоянием государства*. Используемые государством и производимые им достояния (и, в частности, состояния) располагаются в *учреждениях* государства и в его средах. Все эти достояния подразделяются на следующие **виды**: *содержательное* (код 1), *распорядительное* (код 2), *верховное* (код 3), *обеспечительное* (код 4), *учётное* (код 5). Объединения этих достояний по всем учреждениям основной системы дают *достояния основной системы*, а объединения по всем учреждениям государства дают *достояния государства*. Объ-

единение всех достояний государства по всем видам достояний даёт *совокупное достояние государства*.

Каждая основная система производит достояние **своего вида**. При производстве соответствующего достояния каждая система использует некоторые из имеющихся в ней достояний. Все основные системы связаны между собой потоками производимых достояний. Содержательная, учётная и обеспечительная системы получают из сред государства и отдают эти среды соответствующие достояния.

Изображение основных систем государства и имеющихся в нём достояний и потоков дано ниже на рисунке 1.

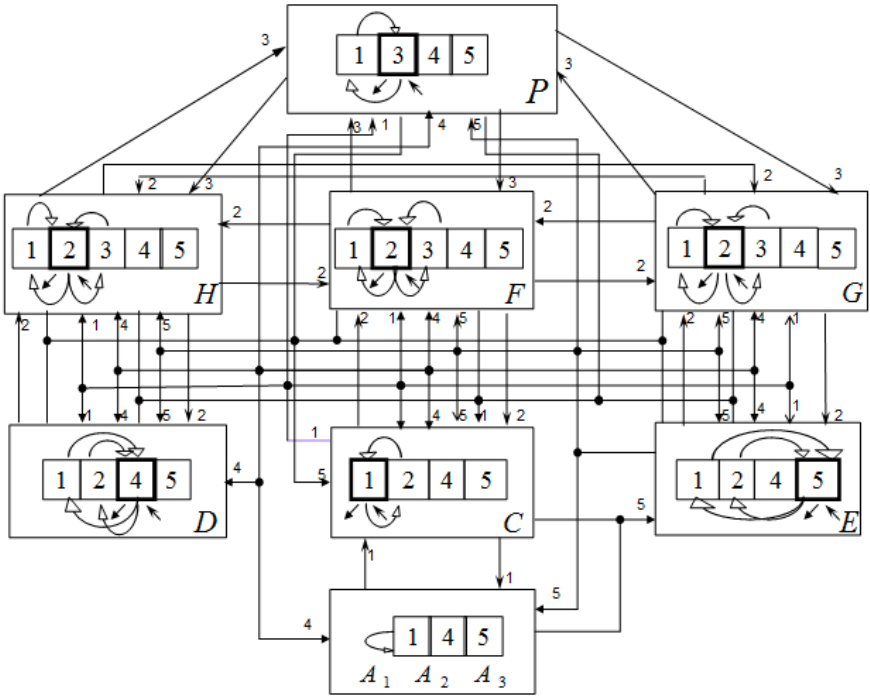


Рис. 1. Схема систем, достояний и потоков государства

ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКОВ ДОСТОЯНИЙ

Рассмотрим *основной временной промежуток* $[T_1, T_2]$. На этом промежутке будем брать момент времени t и временное приращение Δt , такие, что $T_1 \leq t - \Delta t \leq t \leq t + \Delta t \leq T_2$.

Совокупность всех конкретных (надприродных) достояний x вида m в системе M в момент времени t обозначим через $V_M^m(t)$, а совокупность всех конкретных достояний всех видов $m=1,2,3,4,5$ во всех системах $M=C,D,E,F,G,H,P$ обозначим через $V(t)$. Рассмотрим *полную совокупность* $V(T_1, T_2)$ всех конкретных достояний x , принадлежащих всем совокупностям $V(t)$ для всех t из основного промежутка $[T_1, T_2]$.

Пусть $c(t)x$ обозначает реальную стоимость конкретного достояния x в момент времени t (см. раздел 4.6 из книг [6, 7]). Число $W_M^m(t)$, равное сумме реальных стоимостей $c(t)x$ всех конкретных достояний x из совокупности $V_M^m(t)$, назовём *оценённым совокупным достоянием вида t системы M в момент времени t* .

Совокупность $R_{MN}^{mm}(t - \Delta t, t + \Delta t)$, состоящую из всех конкретных достояний x из полной совокупности $V(T_1, T_2)$, таких, что x входит в совокупность $V_M^m(t - \Delta t)$, и x не входит в совокупность $V_N^n(t - \Delta t)$, и x не входит в совокупность $V_M^m(t + \Delta t)$, и x входит в совокупность $V_N^n(t + \Delta t)$, назовём *потоком на промежутке времени от $t - \Delta t$ до $t + \Delta t$ из системы M в систему N совокупности конкретных достояний вида t в совокупность конкретных достояний вида n* .

Число $S_{MN}^{mm}(t - \Delta t, t + \Delta t)$, равное сумме реальных стоимостей $c(t)x$ всех конкретных достояний x из потока $R_{MN}^{mm}(t - \Delta t, t + \Delta t)$, назовём *оценённым потоком на промежутке времени от $t - \Delta t$ до $t + \Delta t$ из системы M в систему N совокупности конкретных достояний вида t в совокупность конкретных достояний вида n* .

Число $S_{MN}^{mm}(t)$, равное пределу при Δt , стремящемся к нулю, от оценённого промежуточного потока $S_{MN}^{mm}(t - \Delta t, t + \Delta t)$, делённого на число $2\Delta t$, назовём *оценённым потоком в момент времени t из системы M в систему N совокупности конкретных достояний вида t в совокупность конкретных достояний вида n* .

Далее слова «совокупный» и «оценённый» и указание на момент времени t будем в основном опускать.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГОСУДАРСТВА

Напомним, что число $\dot{W}_M^m(t)$, равное пределу при Δt , стремящемся к нулю, от разности $W_M^m(t + \Delta t) - W_M^m(t - \Delta t)$ (оценённых) совокупных достояний в моменты времени $t - \Delta t$ и $t + \Delta t$, делённой на число $2\Delta t$, называется *скоростью изменения (оценённого) совокупного достояния вида t системы M в момент времени t* .

Поток $S_{LM}^{lm}(t)$ назовём *входящим в систему M* , поток $S_{MN}^{mm}(t)$ назовём *выходящим из системы M* , а потоки $S_{MM}^{lm}(t)$ и $S_{MM}^{mm}(t)$ назовём *преобразовательными* (они являются и входящими, и выходящими одновременно).

Система эволюционных уравнений государства составляется по следующему **принципу сохранения**: скорость изменения оценённого совокупного достояния какого-либо вида в какой-либо основной системе в момент времени t равна сумме всех входящих оценённых потоков этого достояния в эту систему в момент времени t минус сумма всех выходящих оценённых потоков этого достояния из этой системы в момент времени t .

В указанных выше публикациях автора математическая модель государства S была описана посредством следующей **упрощённой системы уравнений государства при базисном использовании ссудного дохода**:

$$1) \quad \dot{W}_C^1 = L_{EC}^{55} - (p_1 B_{ED}^{55} + p_2 B_{EE}^{55} + p_3 B_{EF}^{55} + p_4 B_{EG}^{55} + p_5 B_{EH}^{55} + p_6 B_{EP}^{55}) - e_0 W_C^1,$$

где

$$L_{EC}^{55} = a W_C^1 (K - W_C^1) / (c + dr + (B_{EC_b}^{55} + B_{ED}^{55} + B_{EE}^{55} + B_{EF}^{55} + B_{EG}^{55} + B_{EH}^{55} + B_{EP}^{55})).$$

$$2) \quad \dot{W}_D^4 = B_{ED}^{55} - e_1 W_D^4$$

- 3) $\dot{W}_E^5 = B_{EE}^{55} - e_2 W_E^5$
- 4) $\dot{W}_F^2 = B_{EF}^{55} - e_3 W_F^2$
- 5) $\dot{W}_G^2 = B_{EG}^{55} - e_4 W_G^2$
- 6) $\dot{W}_H^2 = B_{EH}^{55} - e_5 W_H^2$
- 7) $\dot{W}_P^3 = B_{EP}^{55} - e_6 W_P^3$.

Здесь $K > 0$, $a, c, d > 0$, $0 < e_i < 1$, $0 < p_i < 1$, $0 < p_i < 1$, r – ключевая ставка эмиссионного центра государства, C_b – бюджетная подсистема содержательной системы, а $B_{EC_b}^{55}, B_{ED}^{55}, B_{EE}^{55}, B_{EF}^{55}, B_{EG}^{55}, B_{EH}^{55}, B_{EP}^{55}$ – бюджетные потоки из учётной системы во все указанные системы государства S .

Рассмотрим совокупность $\sigma[t_0, t]$ всех S -внутренних управлений $r, B_{EC_b}^{55}, B_{ED}^{55}, B_{EE}^{55}, B_{EF}^{55}, B_{EG}^{55}, B_{EH}^{55}, B_{EP}^{55}$, заданных как функции от момента времени t' на промежутке времени $[t_0, t]$. Верховная система государства должна решать **оптимизационную задачу** на выбор оптимизирующих S -внутренних управлений в системе исходных уравнений для государства S в соответствии с поставленными целями на временном промежутке $[t_0, T]$. При этом оптимизирующие управления должны быть ограничены как снизу, так и сверху следующими числовыми неравенствами:

$$n_0 \leq r \leq n_1, (B_{DM}^{55})_0 \leq B_{DM}^{55} \leq (B_{DM}^{55})_1 \text{ для } M=C_b, D, E, F, G, H, P.$$

Одной из возможных оптимизационных задач может быть следующая задача. Рассмотрим *совокупное достояние* $W_S(t, \sigma[t_0, t]) = (W_C^1 + W_D^4 + W_E^5 + W_F^2 + W_G^2 + W_H^2 + W_P^3)(t)$ государства S в момент времени t при управлении $\sigma[t_0, t]$ на промежутке времени $[t_0, T]$. Рассмотрим *начальное совокупное достояние* $W_S(t_0) = (W_C^1 + W_D^4 + W_E^5 + W_F^2 + W_G^2 + W_H^2 + W_P^3)(t_0)$ государства S в момент времени t_0 . Рассмотрим *возможную целевую функцию* $\Phi(t, \sigma[t_0, t]) = W_S(t, \sigma[t_0, t]) - W_S(t_0)$ *прироста совокупного достояния государства S к моменту времени t при управлении $\sigma[t_0, t]$ относительно его начального совокупного достояния в момент времени t_0 .*

Деятельность государства S при управлении $\sigma^*[t_0, T]$ называется **оптимальной** на промежутке времени $[t_0, T]$ относительно выбранной целевой функции, если при деятельности государства S с любым другим управлением $\sigma[t_0, T]$ выполнено неравенство $\Phi(T, \sigma^*[t_0, T]) \geq \Phi(T, \sigma[t_0, T])$. Формально это можно записать в виде $\Phi(T, \sigma[t_0, T]) \rightarrow \max$ в системе исходных уравнений для государства S .

В статьях [4, 5] было найдено оптимальное решение последней системы при следующих числовых данных:

$$T=100, K=300, d=20, a=0,0005, c=1, p_1=0,3, p_2=0,6, p_3=p_4=p_5=0,2, p_6=0,7, e_0=0,015, e_1=0,005, e_2=0,02, e_3=e_4=e_5=0,005, e_6=0,01, W_C^1(0)=100, W_D^4(0)=20, W_E^5(0)=20, W_F^2(0)=10, W_G^2(0)=10, W_H^2(0)=10, W_P^3(0)=30, r_0=0,001, r_1=1, (B_{EC_b}^{55})_0=0, (B_{EC_b}^{55})_1=0,5, (B_{DM}^{55})_0=0,1, (B_{DM}^{55})_1=0,2 \text{ для } M=D, E, F, G, H, P.$$

Оптимальным оказалось постоянное управление $u^*(t)=r_0=0.001$, $v^*(t)=(B_{EC_b}^{55})_0=0$, $w_1^*(t)=(B_{ED}^{55})_1=0,2$, $w_2^*(t)=(B_{EE}^{55})_1=0,2$, $w_3^*(t)=(B_{EF}^{55})_1=0,2$, $w_4^*(t)=(B_{EG}^{55})_1=0,2$, $w_5^*(t)=(B_{EH}^{55})_1=0,2$, $w_6^*(t)=(B_{EP}^{55})_1=0,2$ при $0 \leq t \leq 100$. При этом управлении **наибольшее значение** целевой функции $\Phi(T, \sigma^*[t_0, T])$ совокупного конечного достояния государства к моменту времени $T=100$ оказалось равным 353,127.

Отметим, что найденное решение $\Phi(T, \sigma^*[t_0, T])$ непрерывно зависит от начальных условий. Численный эксперимент показал, что малые возмущения начальных условий задачи не вызывают сильного возмущения решения, что свидетельствует о его устойчивости.

Наибольшее совокупное достояние государства в конце временного промежутка достигается при следующих управлениях: 1) при самой низкой и **постоянной** установочной ставке учётной системы $r(t)=0.001$; 2) при самом низком и **постоянном** бюджетном потоке $B_{EC_c}^{55}(t)=0$ в базисную казённую часть содержательной системы C_b ; 3) при самых высоких и **постоянных** бюджетных потоках $B_{EM}^{55}(t)=0,2$ в системы $M=D,E,F,G,H,P$.

3. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИРНОГО ПОДЧИНТЕЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ГОСУДАРСТВ

Будем теперь рассматривать два государства: государство S , изображённое выше, и государство $S(I)$, все соответствующие признаки которого снабжены указательной римской цифрой I в круглых скобках. В этой части статьи мы рассмотрим **мирное** взаимодействие между государствами S и $S(I)$, которое осуществляется **торгово-валютным** управлением $\tau[t_0, t]$, приводящим в итоге к **подчинению государства S государству $S(I)$** .

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ДОСТОЯНИЯ И ПОТОКИ ПРИ МИРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ГОСУДАРСТВ

Составим математические модели оптимального итогового мирного подчинения государства S государству $S(I)$ при условиях **согласованных** и **несогласованных действий** верховных систем этих государств.

Для этого в содержательную систему C государства S введём дополнительное содержательное достояние $1(I)$ системы $C(I)$ государства $S(I)$, а в содержательную систему $C(I)$ государства $S(I)$ введём содержательное достояние 1 системы C государства S .

Введём также дополнительные потоки $Z_{CC}^{1(I)}$, $Z_{CC(I)}^{1(I)}$, $Z_{C(I)C}^{1(I)}$ и $Z_{C(I)C(I)}^{1(I)}$ для систем C и $C(I)$. Название и смысл этих потоков разясняются далее.

Кроме того, в учётную систему E государства S и в учётную систему $E(I)$ государства $S(I)$ введём дополнительное учётное достояние с кодом w , называемое *мировой валютой*. Эта мировая валюта обеспечивает проведение обменных операций и сделок между государствами S и $S(I)$.

Введём также дополнительные потоки $Y_{E(I)E}^{ww}$ и $Y_{EE(I)}^{ww}$ для систем E и $E(I)$, название и смысл которых разясняются далее.

НАЗВАНИЕ И СМЫСЛ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПОТОКОВ

Поток $Z_{CC}^{1(I)}$ назовём *продажным в S для $S(I)$* . Смысл его состоит в том, что содержательное достояние 1 системы C продаётся государством S государству $S(I)$ и покупается государством $S(I)$ у государства S за мировую валюту, после чего становится содержательным достоянием $1(I)$ системы $C(I)$.

Поток $Z_{CC(I)}^{1(I)1(I)}$ называется *экспортным из S в S(I) и импортным в S(I) из S*. Смысл его состоит в том, что приобретённое (купленное) государством $S(I)$ содержательное достояние $1(I)$ доставляется в систему $C(I)$.

Поток $Z_{C(I)C(I)}^{1(I)1}$ называется *продажным в S(I) для S*. Смысл его состоит в том, что содержательное достояние $1(I)$ системы $C(I)$ продаётся государством $S(I)$ государству S и покупается государством S у государства $S(I)$ за мировую валюту, после чего становится содержательным достоянием 1 системы C .

Поток $Z_{C(I)C}^{11}$ называется *экспортным из S(I) в S и импортным в S из S(I)*. Смысл его состоит в том, что приобретённое государством S содержательное достояние 1 доставляется в систему C .

Поток $Y_{E(I)E}^{ww}$ называется *экспортно-оплатным государством S(I) государству S*. Смысл его состоит в том, что за проданное государством S государству $S(I)$ содержательное достояние 1 из учётной системы $E(I)$ в учётную систему E передаётся мировая валюта w .

Поток $Y_{EE(I)}^{ww}$ называется *импортно-оплатным государством S государству S(I)*. Смысл его состоит в том, что за купленное государством S у государства $S(I)$ содержательное достояние 1 из учётной системы E в учётную систему $E(I)$ передаётся мировая валюта w .

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ДЕНЬГАМИ РАЗНЫХ ГОСУДАРСТВ И СВЯЗИ МЕЖДУ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ПОТОКАМИ

Поскольку некоторые потоки оценены в деньгах 5 государства S , а некоторые оценены в деньгах $5(I)$ государства $S(I)$, постольку связи между потоками, оценёнными в разных деньгах, будем выражать посредством перевода этих денег в фиксированную мировую валюту w .

Число $s(t)$ из соотношения $q(t)=s(t)q_w(t)$, где $q(t)$ – количество внутренних денег 5 государства S и $q_w(t)$ – количество валюты при обмене внутренних денег на валюту, называется *курсом обмена внутренних денег 5 государства S на фиксированную мировую валюту w в момент времени t*. Аналогично, число $s(I)(t)$ из соотношения $q(I)(t)=s(I)(t)q_w(t)$, где $q(I)(t)$ – количество внутренних денег $5(I)$ государства $S(I)$ и $q_w(t)$ – количество валюты при обмене внутренних денег на валюту, называется *курсом обмена внутренних денег 5(I) государства S(I) на фиксированную мировую валюту w в момент времени t*.

Из этих определений вытекают следующие соотношения между потоками: $Z_{CC}^{11(I)} = s Y_{E(I)E}^{ww}$, $Z_{C(I)C}^{11} = s Y_{EE(I)}^{ww}$, $Z_{C(I)C(I)}^{1(I)1} = s(I) Y_{EE(I)}^{ww}$ и $Z_{CC(I)}^{1(I)1(I)} = s(I) Y_{E(I)E}^{ww}$.

Будем считать, что переводные и отправленные потоки «равны» в мировой валюте, т.е. связаны соотношениями

$$(1/s)Z_{CC}^{11(I)} = (1/s(I))Z_{CC(I)}^{1(I)1(I)} \text{ и } (1/s(I))Z_{C(I)C(I)}^{1(I)1} = (1/s)Z_{C(I)C}^{11}$$

ИЗМЕНЁННЫЕ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГОСУДАРСТВА S

С учётом дополнительных потоков уравнения для государства S , написанные выше, изменятся следующим образом:

$$1) \quad \dot{W}_C^1 = L_{EC}^{55} - (p_1 B_{ED}^{55} + p_2 B_{EE}^{55} + p_3 B_{EF}^{55} + p_4 B_{EG}^{55} + p_5 B_{EH}^{55} + p_6 B_{EP}^{55}) - e_0 W_C^1 + Z_{C(I)C}^{11} - Z_{CC}^{11(I)},$$

где

$$L_{EC}^{55} = a W_C^1 (K - W_C^1) / (c + dr + (B_{EC_b}^{55} + B_{ED}^{55} + B_{EE}^{55} + B_{EF}^{55} + B_{EG}^{55} + B_{EH}^{55} + B_{EP}^{55})).$$

$$2) \quad \dot{W}_D^4 = B_{ED}^{55} - e_1 W_D^4$$

$$3) \quad \dot{W}_E^5 = B_{EE}^{55} - e_2 W_E^5$$

$$4) \quad \dot{W}_F^2 = B_{EF}^{55} - e_3 W_F^2$$

$$5) \quad \dot{W}_G^2 = B_{EG}^{55} - e_4 W_G^2$$

$$6) \quad \dot{W}_H^2 = B_{EH}^{55} - e_5 W_H^2$$

$$7) \quad \dot{W}_P^3 = B_{EP}^{55} - e_6 W_P^3.$$

$$8) \quad \dot{W}_E^w = Y_{E(I)E}^{ww} - Y_{EE(I)}^{ww} - e_7 W_E^w$$

$$9) \quad \dot{W}_C^{1(I)} = (s(I)/s) Z_{CC}^{11(I)} - Z_{CC(I)}^{11(I)} = 0.$$

Здесь уравнения 1)-7) написаны в деньгах 5 государства S , уравнение 8) написано в мировой валюте w , а уравнение 9) написано в деньгах 5(I) государства $S(I)$

Используя указанные выше соотношения, окончательно получаем:

$$1) \quad \dot{W}_C^1 = L_{EC}^{55} - (p_1 B_{ED}^{55} + p_2 B_{EE}^{55} + p_3 B_{EF}^{55} + p_4 B_{EG}^{55} + p_5 B_{EH}^{55} + p_6 B_{EP}^{55}) - e_0 W_C^1 + s Y_{EE(I)}^{ww} - s Y_{E(I)E}^{ww},$$

где

$$L_{EC}^{55} = a W_C^1 (K - W_C^1) / (c + dr + (B_{EC_b}^{55} + B_{ED}^{55} + B_{EE}^{55} + B_{EF}^{55} + B_{EG}^{55} + B_{EH}^{55} + B_{EP}^{55})).$$

$$2) \quad \dot{W}_D^4 = B_{ED}^{55} - e_1 W_D^4$$

$$3) \quad \dot{W}_E^5 = B_{EE}^{55} - e_2 W_E^5$$

$$4) \quad \dot{W}_F^2 = B_{EF}^{55} - e_3 W_F^2$$

$$5) \quad \dot{W}_G^2 = B_{EG}^{55} - e_4 W_G^2$$

$$6) \quad \dot{W}_H^2 = B_{EH}^{55} - e_5 W_H^2$$

$$7) \quad \dot{W}_P^3 = B_{EP}^{55} - e_6 W_P^3.$$

$$8) \quad \dot{W}_E^w = Y_{E(I)E}^{ww} - Y_{EE(I)}^{ww} - e_7 W_E^w$$

Для этой системы рассматривается первичная совокупность $\sigma[t_0, t]$ всех S -внутренних управлений $r, B_{EC_b}^{55}, B_{ED}^{55}, B_{EE}^{55}, B_{EF}^{55}, B_{EG}^{55}, B_{EH}^{55}, B_{EP}^{55}, s$, заданных как функции от момента времени t' на промежутке времени $[t_0, t]$ (см. часть 1).

ИЗМЕНЁННЫЕ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГОСУДАРСТВА $S(I)$

Подобным образом для государства $S(I)$ получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{C(I)}^{1(I)} &= L_{E(I)C(I)}^{5(I)5(I)} - (p_1(I)B_{E(I)D(I)}^{5(I)5(I)} + p_2(I)B_{E(I)E(I)}^{5(I)5(I)} \\ 1(I) &+ p_3(I)B_{E(I)F(I)}^{5(I)5(I)} + p_4(I)B_{E(I)G(I)}^{5(I)5(I)} + p_5(I)B_{E(I)H(I)}^{5(I)5(I)} + \\ &p_6(I)B_{E(I)P(I)}^{5(I)5(I)}) - e_0(I)W_{C(I)}^{1(I)} + s(I)Y_{E(I)E}^{ww} - s(I)Y_{EE(I)}^{ww}, \end{aligned}$$

где

$$L_{E(I)C(I)}^{5(I)5(I)} = a(I)W_{C(I)}^{1(I)}(K(I) - W_{C(I)}^{1(I)}) / (c(I) + d(I)r(I) +$$

$$(B_{E(I)C_b(I)}^{5(I)5(I)} + B_{E(I)D(I)}^{5(I)5(I)} + B_{E(I)E(I)}^{5(I)5(I)} + B_{E(I)F(I)}^{5(I)5(I)} + B_{E(I)G(I)}^{5(I)5(I)} + B_{E(I)H(I)}^{5(I)5(I)} + B_{E(I)P(I)}^{5(I)5(I)}).$$

$$2(I) \quad \dot{W}_{D(I)}^{4(I)} = B_{E(I)D(I)}^{5(I)5(I)} - e_1(I)W_{D(I)}^{4(I)}$$

$$3(I) \quad \dot{W}_{E(I)}^{5(I)} = B_{E(I)E(I)}^{5(I)5(I)} - e_2(I)W_{E(I)}^{5(I)}$$

$$4(I) \quad \dot{W}_{F(I)}^{2(I)} = B_{E(I)F(I)}^{5(I)5(I)} - e_3(I)W_{F(I)}^{2(I)}$$

$$5(I) \quad \dot{W}_{G(I)}^{2(I)} = B_{E(I)G(I)}^{5(I)5(I)} - e_4(I)W_{G(I)}^{2(I)}$$

$$6(I) \quad \dot{W}_{H(I)}^{2(I)} = B_{E(I)H(I)}^{5(I)5(I)} - e_5(I)W_{H(I)}^{2(I)}$$

$$7(I) \quad \dot{W}_{P(I)}^{3(I)} = B_{E(I)P(I)}^{5(I)5(I)} - e_6(I)W_{P(I)}^{3(I)}$$

$$8) \quad \dot{W}_{E(I)}^w = Y_{EE(I)}^{ww} - Y_{E(I)E}^{ww} - e_7(I)W_{E(I)}^w.$$

Здесь уравнения 1)-7) написаны в деньгах $5(I)$ государства $S(I)$, а уравнение 8) написано в мировой валюте w .

Для этой системы рассмотрим первичную совокупность $\sigma(I)[t_0, t]$ всех $S(I)$ -*внутренних* управлений

$r(I), B_{E(I)C_b(I)}^{5(I)5(I)}, B_{E(I)D(I)}^{5(I)5(I)}, B_{E(I)E(I)}^{5(I)5(I)}, B_{E(I)F(I)}^{5(I)5(I)}, B_{E(I)G(I)}^{5(I)5(I)}, B_{E(I)H(I)}^{5(I)5(I)}, B_{E(I)P(I)}^{5(I)5(I)}, s(I)$, заданных как функции от момента времени t' на промежутке времени $[t_0, t]$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИРНОГО СОГЛАСОВАННОГО ПОДЧИНТЕЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ГОСУДАРСТВ

Рассмотрим сначала случай мирного взаимодействия двух государств, когда **есть согласие** на подчинение государству $S(I)$ со стороны верховной системы государства S , и поэтому есть согласованное управление $S(I)$ -подчинением,

В этом случае рассмотрим вторичную совокупность $\tau[t_0, t]$ всех *наружных управлений* $Y_{EE(I)}^{ww}, Y_{E(I)E}^{ww}$, состоящую из всех платных валютных потоков. Совокупное управление $(\sigma[t_0, t], \tau[t_0, t], \tau[t_0, t])$ обозначим через $u[t_0, t]$. Назовём его *мирным согласованным совокупным управлением в системах уравнений для государств S и $S(I)$* .

Рассмотрим *совокупное* *достояние*
 $W_S(t, u[t_0, t]) = (W_C^1 + W_D^4 + W_E^5 + W_F^2 + W_G^2 + W_H^2 + W_P^3)(t)$ государства S в момент времени t
 при управлении $u[t_0, t]$ на промежутке времени $[t_0, T]$. Точно так же рассмотрим *совокупное*
достояние $W_{S(I)}(t, u[t_0, t]) = (W_{C(I)}^1 + W_{D(I)}^4 + W_{E(I)}^5 + W_{F(I)}^2 + W_{G(I)}^2 + W_{H(I)}^2 + W_{P(I)}^3)(t)$ госу-
 дарства $S(I)$ в момент времени t при управлении $u[t_0, t]$ на промежутке времени $[t_0, T]$.

Рассмотрим *начальное* *совокупное* *достояние*
 $W_S(t_0) = (W_C^1 + W_D^4 + W_E^5 + W_F^2 + W_G^2 + W_H^2 + W_P^3)(t_0)$ государства S в момент времени t_0 и
 начальное *совокупное* *достояние*

$W_{S(I)}(t_0) = (W_{C(I)}^1 + W_{D(I)}^4 + W_{E(I)}^5 + W_{F(I)}^2 + W_{G(I)}^2 + W_{H(I)}^2 + W_{P(I)}^3)(t_0)$ государства
 $S(I)$ в момент времени t_0 . Рассмотрим начальное число $\Psi(t_0) = W_{S(I)}(t_0) - W_S(t_0)$.

Рассмотрим *целевую функцию* $\Psi(t, u[t_0, t]) = W_{S(I)}(t, u[t_0, t]) - W_S(t, u[t_0, t])$ *расхож-*
дения *совокупного* *достояния* государства $S(I)$ к моменту времени t при мирном управлении
 $u[t_0, t]$ относительно *совокупного* *достояния* государства S к моменту времени t .

Взаимодействие государств S и $S(I)$ при мирном согласованном управлении $u[t_0, T]$ в
 системах уравнений для государств S и $S(I)$ назовём *мирным согласованным взаимодей-*
ствием и обозначим через $A(S, S(I), u[t_0, T])$. Мирное согласованное взаимодействие
 $A(S, S(I), u[t_0, T])$ назовём $(S(I), \alpha, \beta)$ -*подчинительным* (для государства S с числовыми
 уровнями подчинения $\alpha > 1$ и $\beta > 1$), если выполнены два неравенства:

$$1) \quad W_{S(I)}(T, u[t_0, T]) - W_S(T, u[t_0, T]) \geq \alpha(W_{S(I)}(t_0) - W_S(t_0)), \quad \text{т.е.}$$

$\Psi(T, u[t_0, T]) \geq \alpha\Psi(t_0)$ (*итоговое расхождение*);

$$2) \quad W_{S(I)}(T, u[t_0, T]) \geq \beta W_{S(I)}(t_0) \quad (\text{итоговое обогащение}).$$

Мирное согласованное $(S(I), \alpha, \beta)$ -подчинительное взаимодействие
 $A(S, S(I), u^*[t_0, T])$ называется *оптимальным* на промежутке времени $[t_0, T]$ относительно
 выбранной целевой функции $\Psi(t, u[t_0, t])$, если для любого другого мирного согласованного
 $(S(I), \alpha, \beta)$ -подчинительного взаимодействия $A(S, S(I), u[t_0, T])$ выполнено неравенство
 $\Psi(T, u^*[t_0, T]) \geq \Psi(T, u[t_0, T])$. Формально это можно записать в виде $\Psi(T, u[t_0, T]) \rightarrow \max$ в
 вышеприведённых системах уравнений для государств S и $S(I)$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИРНОГО НЕСОГЛАСОВАННОГО ПОДЧИНИТЕЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ГОСУДАРСТВ

Рассмотрим теперь случай мирного взаимодействия двух государств, когда **нет согласия** на
 подчинение государству $S(I)$ со стороны верховной системы государства S , и поэтому нет
 согласованного управления $S(I)$ -подчинением, но $S(I)$ -подчинение, тем не менее, происхо-
 дит независимо от любого S -внутреннего управления $\sigma[t_0, t]$.

В этом случае рассмотрим одностороннее *совокупное* управление $(\sigma(I)[t_0, t], \tau[t_0, t])$,
 проводимое самостоятельно государством $S(I)$ отдельно от S -внутреннего управления
 $\sigma[t_0, t]$. Это управление обозначим через $u[t_0, t]$. Назовём его *мирным несогласованным со-*
вокупным управлением в системе уравнений для государства $S(I)$.

Рассмотрим *совокупное* *достояние*
 $W_{S(I)}(t, u[t_0, t]) = (W_{C(I)}^1 + W_{D(I)}^4 + W_{E(I)}^5 + W_{F(I)}^2 + W_{G(I)}^2 + W_{H(I)}^2 + W_{P(I)}^3)(t)$ государства $S(I)$
 в момент времени t при управлении $u[t_0, t]$ на промежутке времени $[t_0, T]$. Рассмотрим

начальное совокупное достояние $W_S(t_0) = (W_C^1 + W_D^4 + W_E^5 + W_F^2 + W_G^2 + W_H^2 + W_P^3)(t_0)$ государства S в момент времени t_0 и начальное совокупное достояние $W_{S(I)}(t_0) = (W_{C(I)}^1 + W_{D(I)}^4 + W_{E(I)}^5 + W_{F(I)}^2 + W_{G(I)}^2 + W_{H(I)}^2 + W_{P(I)}^3)(t_0)$ государства $S(I)$ в момент времени t_0 . Рассмотрим начальное число $\Psi(t_0) = W_{S(I)}(t_0) - W_S(t_0)$.

Рассмотрим целевую функцию $\Psi(t, u[t_0, t]) = W_{S(I)}(t, u[t_0, t]) - W_S(t_0)$ **расхождения** совокупного достояния государства $S(I)$ к моменту времени t при мирном управлении $u[t_0, t]$ относительно начального совокупного достояния государства S в момент времени t_0 .

Взаимодействие государств S и $S(I)$ при мирном несогласованном управлении $u[t_0, T]$ в системе уравнений для государства $S(I)$ назовём **мирным несогласованным взаимодействием** и обозначим через $A(S, S(I), u[t_0, T])$. Мирное несогласованное взаимодействие $A(S, S(I), u[t_0, T])$ назовём $(S(I), \alpha, \beta)$ -**подчинительным** (для государства S с с числовыми уровнями подчинения $\alpha > 1$ и $\beta > 1$), если выполнены два неравенства:

- 1) $W_{S(I)}(T, u[t_0, T]) - W_S(t_0) \geq \alpha(W_{S(I)}(t_0) - W_S(t_0))$, т.е. $\Psi(T, u[t_0, T]) \geq \alpha\Psi(t_0)$ (итоговое расхождение);
- 2) $W_{S(I)}(T, u[t_0, T]) \geq \beta W_{S(I)}(t_0)$ (итоговое обогащение).

Мирное несогласованное $(S(I), \alpha, \beta)$ -подчинительное взаимодействие $A(S, S(I), u^*[t_0, T])$ называется **оптимальным** на промежутке времени $[t_0, T]$ относительно выбранной целевой функции $\Psi(t, u[t_0, t])$, если для любого другого мирного несогласованного $(S(I), \alpha, \beta)$ -подчинительного взаимодействия $A(S, S(I), u[t_0, T])$ выполнено неравенство $\Psi(T, u^*[t_0, T]) \geq \Psi(T, u[t_0, T])$. Формально это можно записать в виде $\Psi(T, u[t_0, T]) \rightarrow \max$ в вышеприведённой системе уравнений для государства $S(I)$.

4. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЕННОГО ПОДЧИНИТЕЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ГОСУДАРСТВ

В этой части статьи мы рассмотрим **военное подчинение государства S государству $S(I)$** , ещё более жёсткое, чем рассмотренное выше мирное несогласованное $S(I)$ -подчинение. Оно осуществляется не торгово-валютным, а **нападательным** управлением $\tau[t_0, t]$ со стороны государства $S(I)$ независимо от любого S -внутреннего управления $\sigma[t_0, t]$.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ДОСТОЯНИЯ И ПОТОКИ ПРИ ВОЕННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ГОСУДАРСТВ

Будем по-прежнему рассматривать два государства: государство S , изображённое в первой части, и государство $S(I)$, все соответствующие признаки которого снабжены указательной римской цифрой I в круглых скобках.

Составим математическую модель оптимального итогового военного подчинения государства S государству $S(I)$ при условии **нападения** государства $S(I)$ на государство S .

Для этого в содержательную систему C государства S введём дополнительное содержательное достояние $1(I)$ системы $C(I)$ государства $S(I)$ и дополнительное обеспечительное достояние $4(I)$ системы $D(I)$ государства $S(I)$.

Введём также дополнительные потоки $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$, $Z_{CC}^{11(I)}$, $Z_{CC(I)}^{1(I)1(I)}$, $Z_{C \rightarrow}^{11}$ и $Z_{C \rightarrow}^{4(I)4(I)}$ для системы C , название и смысл которых разясняются далее.

Кроме того в обеспечительную систему D государства S введём дополнительное обеспечительное достояние $4(I)$ системы $D(I)$ государства $S(I)$.

Введём также дополнительные потоки $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$, $Z_{DD}^{44(I)}$, $Z_{DD(I)}^{4(I)4(I)}$, $Z_{D \rightarrow}^{44}$ и $Z_{D \rightarrow}^{4(I)4(I)}$ для системы D , название и смысл которых разясняются далее.

НАЗВАНИЕ И СМЫСЛ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПОТОКОВ

Поток $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$ называется *нападательным на систему C из системы $D(I)$* для разрушения и отнятия, указанных ниже.

Поток $Z_{CC}^{11(I)}$ называется *содержательно предотъёмным*. Смысл его состоит в том, что содержательное достояние 1 системы C государства S отнимается государством $S(I)$ посредством военной «силы» $4(I)$, приходящей в систему C в виде нападательного потока $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$, и становится содержательным достоянием $1(I)$ системы $C(I)$.

Поток $Z_{CC(I)}^{1(I)1(I)}$ называется *содержательно отъёмным*. Смысл его состоит в том, что **отнятое** у системы C содержательное достояние $1(I)$ доставляется в систему $C(I)$.

Поток $Z_{C \rightarrow}^{11}$ называется *содержательно разрушительным*. Смысл его состоит в том, что содержательное достояние 1 системы C **разрушается** посредством военной «силы» $4(I)$, приходящей в систему C в виде нападательного потока $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$.

Поток $Z_{C \rightarrow}^{4(I)4(I)}$ называется *издержным относительно системы C* . Смысл его состоит в том, что для разрушения некоторой части содержательного достояния 1 системы C и для отнятия некоторой другой части этого достояния 1 у системы C приходится «жертвовать» военной «силой» $4(I)$, приходящей из системы $D(I)$ в виде нападательного потока $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$.

Поток $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$ называется *нападательным на систему D из системы $D(I)$* для разрушения и отнятия, указанных ниже.

Поток $Z_{DD}^{44(I)}$ называется *обеспечительно предотъёмным*. Смысл его состоит в том, что обеспечительное достояние 4 системы D государства S отнимается государством $S(I)$ посредством военной «силы» $4(I)$, приходящей в систему D в виде нападательного потока $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$, и становится обеспечительным достоянием $4(I)$ системы $D(I)$.

Поток $Z_{DD(I)}^{4(I)4(I)}$ называется *обеспечительно отъёмным*. Смысл его состоит в том, что **отнятое** у системы D обеспечительное достояние $4(I)$ доставляется в систему $D(I)$.

Поток $Z_{D \rightarrow}^{44}$ называется *обеспечительно разрушительным*. Смысл его состоит в том, что обеспечительное достояние 4 системы D **разрушается** посредством военной «силы» $4(I)$, приходящей в систему D в виде нападательного потока $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$.

Поток $Z_{D \rightarrow}^{4(I)4(I)}$ называется *издержным относительно системы D*. Смысл его состоит в том, что для разрушения некоторой части обеспечительного достояния 4 системы D и для отнятия некоторой другой части этого достояния 4 у системы D приходится «жертвовать» военной «силой» 4(I), приходящей из системы D(I) в виде нападательного потока $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$.

СВЯЗИ МЕЖДУ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ПОТОКАМИ

Введём четыре безразмерностные числовые положительные функции от текущего времени t , изменяющегося в промежутке $[t_0, T]$ от t_0 до T

Функцию $g^{(1)}$ назовём *показателем действенности (эффективности) разрушения содержательного достояния 1 системы C посредством военной «силы» 4(I), приходящей из системы D(I) в виде нападательного потока $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$* . Соотношение

$(1/s)Z_{C \rightarrow}^{11} = g^{(1)}(1/s(I))Z_{C \rightarrow}^{4(I)4(I)}$ показывает связь между разрушительным потоком $Z_{C \rightarrow}^{11}$

в системе C и издержным потоком $Z_{C \rightarrow}^{4(I)4(I)}$ в этой системе, выраженную через фиксированную мировую валюту w .

Функцию $h^{(1)}$ назовём *показателем действенности отнимания содержательного достояния 1 системы C посредством военной «силы» 4(I), приходящей из системы D(I) в виде нападательного потока $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$* . Соотношение $(1/s)Z_{CC}^{11(I)} = h^{(1)}(1/s(I))Z_{C \rightarrow}^{4(I)4(I)}$

показывает связь между предотъёмным потоком $Z_{CC}^{11(I)}$ в системе C и издержным потоком $Z_{C \rightarrow}^{4(I)4(I)}$ в этой системе, выраженную через фиксированную мировую валюту w .

Функцию $g^{(4)}$ назовём *показателем действенности разрушения обеспечительного достояния 4 системы D посредством военной «силы» 4(I), приходящей из системы D(I) в виде нападательного потока $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$* . Соотношение $(1/s)Z_{D \rightarrow}^{44} = g^{(4)}(1/s(I))Z_{D \rightarrow}^{4(I)4(I)}$

показывает связь между разрушительным потоком $Z_{D \rightarrow}^{44}$ в системе D и издержным потоком $Z_{D \rightarrow}^{4(I)4(I)}$ в этой системе, выраженную через фиксированную мировую валюту w .

Функцию $h^{(4)}$ назовём *показателем действенности отнимания обеспечительного достояния 4 системы D посредством военной «силы» 4(I), приходящей из системы D(I) в виде нападательного потока $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$* . Соотношение $(1/s)Z_{DD}^{44(I)} = h^{(4)}(1/s(I))Z_{D \rightarrow}^{4(I)4(I)}$

показывает связь между предотъёмным потоком $Z_{DD}^{44(I)}$ в системе D и издержным потоком $Z_{D \rightarrow}^{4(I)4(I)}$ в этой системе, выраженную через фиксированную мировую валюту w .

СОГЛАШЕНИЯ О НЕПРЕРЫВНОСТИ ОБЩИХ ПОТОКОВ

Будем считать, что переводные и отправленные потоки «равны» в мировой валюте, т.е. связаны соотношениями

$$(1/s)Z_{CC}^{11(I)} = (1/s(I))Z_{CC(I)I}^{1(I)1(I)} \text{ и } (1/s)Z_{DD}^{44(I)} = (1/s(I))Z_{DD(I)I}^{4(I)4(I)}.$$

Согласно сказанному ранее считаем, что издержный поток $Z_{C \rightarrow}^{4(I)4(I)}$ равен напада-
тельному потоку $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$ (оба из них выражены в деньгах $S(I)$), т.е. $Z_{C \rightarrow}^{4(I)4(I)} = Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$.

Также согласно сказанному ранее считаем, что издержный поток $Z_{D \rightarrow}^{4(I)4(I)}$ равен напада-
тельному потоку $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$ (оба из них выражены в деньгах $S(I)$), т.е. $Z_{D \rightarrow}^{4(I)4(I)} = Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$.

Используя указанные соглашения, получаем следующие соотношения:

$$Z_{CC(I)}^{1(I)1(I)} = (s(I)/s)Z_{CC}^{11(I)} = (s(I)/s)h^{(1)}(s/s(I))Z_{C \rightarrow}^{4(I)4(I)} = h^{(1)}Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)} \text{ и}$$

$$Z_{DD(I)}^{4(I)4(I)} = (s(I)/s)Z_{DD}^{44(I)} = (s(I)/s)h^{(4)}(s/s(I))Z_{D \rightarrow}^{4(I)4(I)} = h^{(4)}Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}.$$

ИЗМЕНЁННЫЕ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГОСУДАРСТВА S

С учётом дополнительных потоков уравнения для государства S , написанные выше, изме-
няются следующим образом:

$$1) \quad \dot{W}_C^1 = L_{EC}^{55} - (p_1 B_{ED}^{55} + p_2 B_{EE}^{55} + p_3 B_{EF}^{55} + p_4 B_{EG}^{55} + p_5 B_{EH}^{55} + p_6 B_{EP}^{55}) - e_0 W_C^1 - Z_{C \rightarrow}^{11(I)} - Z_{CC}^{11(I)},$$

где

$$L_{EC}^{55} = aW_C^1(K - W_C^1)/(c + dr +$$

$$(B_{EC_b}^{55} + B_{ED}^{55} + B_{EE}^{55} + B_{EF}^{55} + B_{EG}^{55} + B_{EH}^{55} + B_{EP}^{55})).$$

$$2) \quad \dot{W}_D^4 = B_{ED}^{55} - e_1 W_D^4 - Z_{D \rightarrow}^{44} - Z_{DD}^{44(I)}$$

$$3) \quad \dot{W}_E^5 = B_{EE}^{55} - e_2 W_E^5$$

$$4) \quad \dot{W}_F^2 = B_{EF}^{55} - e_3 W_F^2$$

$$5) \quad \dot{W}_G^2 = B_{EG}^{55} - e_4 W_G^2$$

$$6) \quad \dot{W}_H^2 = B_{EH}^{55} - e_5 W_H^2$$

$$7) \quad \dot{W}_P^3 = B_{EP}^{55} - e_6 W_P^3.$$

$$8) \quad \dot{W}_C^{1(I)} = (s(I)/s)Z_{CC}^{11(I)} - Z_{CC(I)}^{1(I)1(I)} = 0$$

$$9) \quad \dot{W}_C^{4(I)} = Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)} - Z_{C \rightarrow}^{4(I)4(I)} = 0$$

$$10) \quad \dot{W}_D^{4(I)} = (s(I)/s)Z_{DD}^{44(I)} - Z_{D \rightarrow}^{4(I)4(I)} - Z_{DD(I)}^{4(I)4(I)} + Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)} = 0.$$

Используя указанные выше связи через числовые функции, соглашения о непрерыв-
ности и полученные выше соотношения, окончательно получаем:

$$1) \quad \dot{W}_C^1 = L_{EC}^{55} - (p_1 B_{ED}^{55} + p_2 B_{EE}^{55} + p_3 B_{EF}^{55} + p_4 B_{EG}^{55} + p_5 B_{EH}^{55} + p_6 B_{EP}^{55}) - e_0 W_C^1 - (g^{(1)} + h^{(1)})(s/s(I))Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)},$$

где

$$L_{EC}^{55} = aW_C^1(K - W_C^1)/(c + dr +$$

$$(B_{EC_b}^{55} + B_{ED}^{55} + B_{EE}^{55} + B_{EF}^{55} + B_{EG}^{55} + B_{EH}^{55} + B_{EP}^{55})).$$

- 2) $\dot{W}_D^4 = B_{ED}^{55} - e_1 W_D^4 - (g^{(4)} + h^{(4)})(s/s(I)) Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$
- 3) $\dot{W}_E^5 = B_{EE}^{55} - e_2 W_E^5$
- 4) $\dot{W}_F^2 = B_{EF}^{55} - e_3 W_F^2$
- 5) $\dot{W}_G^2 = B_{EG}^{55} - e_4 W_G^2$
- 6) $\dot{W}_H^2 = B_{EH}^{55} - e_5 W_H^2$
- 7) $\dot{W}_P^3 = B_{EP}^{55} - e_6 W_P^3.$

Отметим, что последние отрицательные слагаемые в уравнениях 1) и 2) получились из-за нападательного разрушения и отнимания.

Для этой системы рассматривается первичная совокупность $\sigma[t_0, t]$ всех *S-внутренних управлений* $r, B_{EC_b}^{55}, B_{ED}^{55}, B_{EE}^{55}, B_{EF}^{55}, B_{EG}^{55}, B_{EH}^{55}, B_{EP}^{55}$, заданных как функции от момента времени t' на промежутке времени $[t_0, t]$.

ИЗМЕНЁННЫЕ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГОСУДАРСТВА $S(I)$

Подобным образом для государства $S(I)$ получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{C(I)}^{1(I)} &= L_{E(I)C(I)}^{5(I)5(I)} - (p_1(I)B_{E(I)D(I)}^{5(I)5(I)} + p_2(I)B_{E(I)E(I)}^{5(I)5(I)} \\ 1(I)) &+ p_3(I)B_{E(I)F(I)}^{5(I)5(I)} + p_4(I)B_{E(I)G(I)}^{5(I)5(I)} + p_5(I)B_{E(I)H(I)}^{5(I)5(I)} + \\ &p_6(I)B_{E(I)P(I)}^{5(I)5(I)}) - e_0(I)W_{C(I)}^{1(I)} + h^{(1)}Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}, \end{aligned}$$

где

$$L_{E(I)C(I)}^{5(I)5(I)} = a(I)W_{C(I)}^{1(I)}(K(I) - W_{C(I)}^{1(I)}) / (c(I) + d(I)r(I) +$$

$$(B_{E(I)C_b(I)}^{5(I)5(I)} + B_{E(I)D(I)}^{5(I)5(I)} + B_{E(I)E(I)}^{5(I)5(I)} + B_{E(I)F(I)}^{5(I)5(I)}$$

$$+ B_{E(I)G(I)}^{5(I)5(I)} + B_{E(I)H(I)}^{5(I)5(I)} + B_{E(I)P(I)}^{5(I)5(I)})).$$

$$2(I)) \quad \dot{W}_{D(I)}^4 = B_{E(I)D(I)}^{5(I)5(I)} - e_1(I)W_{D(I)}^4 - Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)} - Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)} + h^{(4)}Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$$

$$3(I)) \quad \dot{W}_{E(I)}^5 = B_{E(I)E(I)}^{5(I)5(I)} - e_2(I)W_{E(I)}^5$$

$$4(I)) \quad \dot{W}_{F(I)}^2 = B_{E(I)F(I)}^{5(I)5(I)} - e_3(I)W_{F(I)}^2$$

$$5(I)) \quad \dot{W}_{G(I)}^2 = B_{E(I)G(I)}^{5(I)5(I)} - e_4(I)W_{G(I)}^2$$

$$6(I)) \quad \dot{W}_{H(I)}^2 = B_{E(I)H(I)}^{5(I)5(I)} - e_5(I)W_{H(I)}^2$$

$$7(I)) \quad \dot{W}_{P(I)}^3 = B_{E(I)P(I)}^{5(I)5(I)} - e_6(I)W_{P(I)}^3.$$

Отметим, что последние положительные слагаемые в уравнениях 1) и 2) получились из-за прибавления отниманием.

Для этой системы рассмотрим первичную совокупность $\sigma(I)[t_0, t]$ всех *S(I)-внутренних управлений*

$r(I), B_{E(I)C_b(I)}^{5(I)5(I)}, B_{E(I)D(I)}^{5(I)5(I)}, B_{E(I)E(I)}^{5(I)5(I)}, B_{E(I)F(I)}^{5(I)5(I)}, B_{E(I)G(I)}^{5(I)5(I)}, B_{E(I)H(I)}^{5(I)5(I)}, B_{E(I)P(I)}^{5(I)5(I)}$, заданных как функции от момента времени t' на промежутке времени $[t_0, t]$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЕННОГО ПОДЧИНИТЕЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ГОСУДАРСТВ

Для последней системы рассмотрим вторичную совокупность $\tau(I)[t_0, t]$ всех $S(I)$ -наружных управлений $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}, Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}, g^{(1)}, g^{(4)}, h^{(1)}, h^{(4)}$, состоящую из нападательных потоков, показателей разрушения и показателей отнимания. Совокупное одностороннее управление $(\sigma(I)[t_0, t], \tau(I)[t_0, t])$ обозначим через $u[t_0, t]$. Назовём его *военным (односторонним) совокупным управлением в системе уравнений для государства $S(I)$* .

Рассмотрим совокупное достояние государства $S(I)$ в момент времени t при управлении $u[t_0, t]$ на промежутке времени $[t_0, T]$. Рассмотрим начальное совокупное достояние $W_S(t_0) = (W_C^1 + W_D^4 + W_E^5 + W_F^2 + W_G^2 + W_H^2 + W_P^3)(t_0)$ государства S в момент времени t_0 и начальное совокупное достояние $W_{S(I)}(t_0) = (W_{C(I)}^1 + W_{D(I)}^4 + W_{E(I)}^5 + W_{F(I)}^2 + W_{G(I)}^2 + W_{H(I)}^2 + W_{P(I)}^3)(t_0)$ государства $S(I)$ в момент времени t_0 . Рассмотрим начальное число $\Psi(t_0) = W_{S(I)}(t_0) - W_S(t_0)$.

Рассмотрим целевую функцию $\Psi(t, u[t_0, t]) = W_{S(I)}(t, u[t_0, t]) - W_S(t_0)$ *расхождения совокупного достояния государства $S(I)$ к моменту времени t при военном управлении $u[t_0, t]$ относительно начального совокупного достояния государства S в момент времени t_0* .

Взаимодействие государств S и $S(I)$ при военном управлении $u[t_0, T]$ в системе уравнений для государства $S(I)$ назовём *военным взаимодействием* и обозначим через $A(S, S(I), u[t_0, T])$. Военное взаимодействие $A(S, S(I), u[t_0, T])$ назовём *$(S(I), \alpha, \beta)$ -подчинительным* (для государства S с числовыми уровнями подчинения $\alpha > 1$ и $\beta > 1$), если выполнены два неравенства:

- 1) $W_{S(I)}(T, u[t_0, T]) - W_S(t_0) \geq \alpha(W_{S(I)}(t_0) - W_S(t_0))$, т.е. $\Psi(T, u[t_0, T]) \geq \alpha\Psi(t_0)$ (*итоговое расхождение*);
- 2) $W_{S(I)}(T, u[t_0, T]) \geq \beta W_{S(I)}(t_0)$ (*итоговое обогащение*).

Военное $(S(I), \alpha, \beta)$ -подчинительное взаимодействие $A(S, S(I), u^*[t_0, T])$ называется *оптимальным* на промежутке времени $[t_0, T]$ относительно выбранной целевой функции $\Psi(t, u[t_0, t])$, если для любого другого военного $(S(I), \alpha, \beta)$ -подчинительного взаимодействия $A(S, S(I), u[t_0, T])$ выполнено неравенство $\Psi(T, u^*[t_0, T]) \geq \Psi(T, u[t_0, T])$. Формально это можно записать в виде $\Psi(T, u[t_0, T]) \rightarrow \max$ в вышеприведённой системе уравнений для государства $S(I)$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные модели концептуально отражают следующие важные исторические примеры взаимодействий между государствами. Во время Второй Мировой войны США военным путём обеспечили подчинительное взаимодействие в свою пользу с такими государствами, как Япония, Германия, Италия и др. После войны в течение нескольких лет США уже мир-

ным **согласованным** путём продолжали обеспечивать подчинительное взаимодействие с указанными государствами. В эти же сроки США мирным **несогласованным** путём обеспечили подчинительное взаимодействие в свою пользу с Британской Империей. После приглашения между Робертом Никсоном и Ден Сяопином в 1972 году в течение нескольких лет США мирным **согласованным** путём обеспечивали подчинительное взаимодействие с КНР в свою пользу. После указанных сроков уровни прямого торгово-валютного подчинения во всех упомянутых взаимодействиях постепенно **понижались**, а способы подчинения становились всё более скрытными.

В указанных во введении статьях автора на основе общей концептуальной модели государства решалась конкретно-числовая игровая задача на существование, нахождение и приближённое вычисление оптимизирующего управления в системе исходных уравнений для государства S , приведённой в первой части

То же самое нужно сделать и для изложенных выше общих концептуальных динамических оптимизационных математических моделей мирного и военного подчинительных взаимодействий двух государств.

После этого можно переходить к численному моделированию перечисленных выше наличных исторических взаимодействий между государствами и сверке модельных вычислений с историческими данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуссейнова А.С., Павловский Ю.Н., Устинов В.А. Опыт имитационного моделирования исторического процесса. – М.: Наука, 1984. – 157 с.
2. Захаров В.К., Кузенков О.А. Оптимальное управление в модели государства // Моделирование и анализ данных. 2011. № 1. С. 55-75.
3. Захаров В.К. Номология. Устройство и направление человеческой деятельности. – М.: МГППУ, 2011. – 216 с.
4. Захаров В.К., Капитанов Д.В., Кузенков О.А. Оптимальное управление в модели государства II // Моделирование и анализ данных. 2014. № 1. С. 4-31.
5. Захаров В.К., Кузенков О.А. Оптимальное управление в математической модели государства // Журнал Средневолжского математического общества. 2015. Т. 17, № 2. С. 34-38.
6. Захаров В.К. Номология. Воспроизведение и обновление человеческого бытия. – М.: «Onebook.ru», 2016. – 396 с.
7. Захаров В.К. Этот Новый Старый Мир. Будущее из прошлого. – М.: Издательский дом "Кислород", 2017. – 448 с.
8. Захаров В.К. Математические модели мирного и военного подчинительных взаимодействий двух государств // 26 Международная конференция «Математика. Компьютер. Образование» (28 января-02 февраля 2019г.). Тезисы. – Россия, г. Пушкино: Пушкинский центр биологических исследований РАН, 2019. С. 238.

Работа поступила 20.02.2019г.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИФФУЗИОННОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С УПРАВЛЯЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ЗАГРУЗКИ И ОБРАБОТКИ

К.В. Семенихин, Ю. С. Иванова

Работа посвящена численному анализу качества диффузионной аппроксимации управляемой одноканальной системы массового обслуживания в загруженном состоянии. Управление системой задается вероятностью отказа и интенсивностью обработки. Цель исследования - нахождение условий применимости диффузионной аппроксимации к модели управляемого марковского процесса, описывающего состояние системы. Качество аппроксимации характеризуется величиной равномерной метрики, определяющей расстояние между стационарными распределениями в исходной и приближенной модели, а также числовыми показателями, такими как средняя загрузка, среднее время ожидания, доля отклоненных заявок и объем затраченных ресурсов. Аппроксимация оказывается тем точнее, чем с большей вероятностью диффузионный процесс попадает в интервал доступа, т.е. интервал, в котором вероятность отказа меняется от нуля до единицы.

The paper is devoted to numerical analysis of diffusion approximation accuracy for overloaded controlled single-channel queuing systems. Active queue management is defined by two controlled parameters: rejection probability and service rate. The aim of the study is to find conditions for the applicability of diffusion approximation to the queuing model governed by a continuous-time controlled Markov chain. The accuracy of the approximation is characterized by the uniform metric that specifies the distance between steady-state distributions in the original and approximate models, as well as by several indicators such as average load, average waiting time, the percentage of rejected packets and the amount of resources spent. The approximation is the more accurate, the more likely the diffusion process falls into the access interval - the interval in which the rejection probability varies from zero to one.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Система массового обслуживания, управление доступом, управление загрузкой, дискретный марковский процесс с непрерывным временем, диффузионная аппроксимация, модель линейной диффузии.

ДЛЯ ЦИТАТЫ

К.В. Семенихин, Ю.С. Иванова. Численный анализ диффузионной аппроксимации одноканальной системы массового обслуживания с управляемыми параметрами загрузки и обработки // Моделирование и анализ данных. 2019. №2. С.21-30.

K.V. Semenikhin, Yu.S. Ivanova. Numerical analysis of diffusion approximation for a single-channel queuing system with controlled access and service rates. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis (Russia). 2019, no.2, pp.21-30.

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные системы передачи и обработки информации по своей сути являются системами массового обслуживания (СМО), в которых входной поток состоит из однотипных пакетов — небольших порций данных, предусмотренных сетевым протоколом [1,2]. Традиционные методы анализа и оптимизации СМО основаны на использовании марковских процессов с конечным множеством состояний [3,4].

Однако при значительном объеме трафика практическое применение данной методологии становится затруднительным из-за большого числа уравнений, описывающих стационарные вероятности состояний соответствующей СМО. Один из эффективных способов решения проблемы большой размерности, возникающей при оптимизации дискретных марковских процессов, является метод диффузионной аппроксимации [5,6].

Аналогично [7-9] в данной работе рассматривается одноканальная СМО, имеющая конечную очередь, принимающая на вход простейший поток и предусматривающая возможность управления характеристиками доступа и загрузки: вероятность отказа и интенсивность обработки. Однако в отличие от указанных работ далее система будет изучаться в условиях сильной загрузки. Кроме того, управление осуществляется за счет выбора параметров двух линейных функций, определяющих зависимость вероятности отказа и интенсивности обработки от числа заявок в системе. Обе функции отражают естественное требование роста числа отброшенных пакетов и скорости обработки при увеличении загрузки системы. Целью работы является нахождение условий применимости диффузионной аппроксимации к модели управляемого марковского процесса, описывающего число заявок в системе. В работе предлагается диффузионная аппроксимация, основанная на модели стохастического дифференциального уравнения с линейным сносом и диффузией [10]. Устанавливается, что в зависимости от соотношения параметров системы стационарное распределение аппроксимирующего процесса является трехпараметрическим гамма-распределением или гауссовским.

Если назвать интервалом доступа тот промежуток, в котором вероятность отказа как функция состояния меняется в интервале $(0,1)$. Тогда основной результат работы можно сформулировать следующим образом: качество аппроксимации зависит от вероятности попадания диффузионного процесса в интервал доступа. Поэтому если вероятность отказа априори отделена снизу от нуля и сверху от единицы, то диффузионная аппроксимация вполне приемлема для приближенного описания и последующей оптимизации управляемой СМО с интенсивным входным потоком.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим систему массового обслуживания с конечной очередью и одним прибором, обслуживающим заявку за экспоненциальное время $E(\mu)$. Максимальное число заявок в системе равно N . Изначально поступающий поток заявок является простейшим интенсивности $\alpha > 0$. Однако этот поток прореживается с помощью процедуры геометрического просеивания, в результате чего входной поток, оставаясь простейшим, имеет интенсивность $\alpha(1-r)$, где $r \in [0,1]$ — вероятность отклонения приходящей заявки. Эволюцию числа заявок в системе $M_{\alpha(1-r)}|M_{\mu}|1|N-1$ можно описывать с помощью однородного марковского процесса $\{X(t), t \geq 0\}$ с множеством состояний $E = \{0, 1, \dots, N\}$. Указанный марковский процесс относится к классу процессов рождения и гибели с интенсивностями перехода:

$$\text{a) } \lambda_{x,x+1} = \alpha(1-r) \text{ для } x = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$\text{b) } \lambda_{x-1,x} = \mu \text{ для } x = 1, 2, \dots, N;$$

Предположим, что параметрами входного потока и обслуживающего прибора можно управлять. Пусть вероятность отклонения заявки $r(x)$ и интенсивность обработки $\mu(x)$ являются функциями состояния $x \in E$, а именно:

$$(1) \quad r(x) = \text{proj}_{[0,1]}(r_0 + r_1 x), \quad \mu(x) = \mu_0 + \mu_1 x$$

где $\text{proj}_{[0,1]}(z)$ обозначает проекцию точки z на отрезок $[0,1]$. Роль параметров управления здесь выполняют числа $r_0 < 1, r_1 > 0, \mu_0 > 0, \mu_1 \geq 0$.

В этом случае процесс $X(t)$, равный числу заявок в системе, остается однородным марковским, но его интенсивности переходов теперь зависят от состояния:

$$\text{a) } \lambda_{x,x+1} = \alpha(1-r(x)) \text{ для } x = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$\text{b) } \lambda_{x-1,x} = \mu(x) \text{ для } x = 1, 2, \dots, N;$$

Полученную управляемую СМО будем обозначать $M_{\alpha(1-r(x)) | M_{\mu(x)} | 1 | N - 1$.

По построению вероятность отказа $r(x)$ растет с увеличением загрузки системы, что подобно алгоритму RED (Random Early Detection), предназначенному для отклонения случайной доли входящего трафика для сигнализации передающей стороне о возникновении коллизий[12].

Для функции $r(x)$ в дальнейшем будет использоваться также и другая параметризация:

$$r(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0; \\ (x - x_0)/(x_1 - x_0), & x_0 \leq x \leq x_1; \\ 1, & x \geq x_1, \end{cases}$$

где x_0 обозначает состояние, вплоть до которого все заявки принимаются, а x_1 — состояние, начиная с которого все входящие заявки отклоняются.

Основную роль в дальнейшем играет промежуток (x_0, x_1) , который будем называть *интервалом доступа*, так как именно на нем осуществляется управление доступом к ресурсам СМО.

Кроме того, все входящие заявки принимаются при $X(t) \geq x_0$ и, наоборот, отклоняются при $X(t) \leq x_1$. Поэтому $[0, x_0]$ — *интервал приема* и соответственно $[x_1, N]$ — *интервал блокировки*.

Интенсивность обработки также является возрастающей функцией, что соответствует идеологии семейства протоколов TCP/AQM, увеличивающих скорость приема при росте запросов [13]. При этом $\mu_{min} = \mu_0$,

$\mu_{max} = \mu_0 + \mu_1 N$ — это соответственно минимальное и максимальное значения интенсивности обработки. Характерный вид зависимостей $r(x)$, $\mu(x)$ от состояния системы X указан на рис. 1.

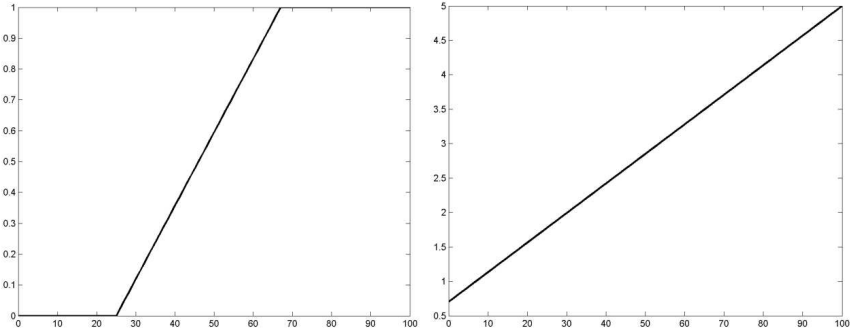


Рис. 1. Вероятность отказа $r(x)$ (слева) и интенсивности обработки $\mu(x)$ (справа).

3. МЕТОД ДИФFUЗИОННОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В качестве диффузионной аппроксимации исходного дискретного марковского процесса $X(t)$, будем рассматривать процесс $\xi(t)$ удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$(2) \quad d\xi(t) = A(\xi(t))dt + B(\xi(t))dW(t),$$

где $A(x), B(x)$ — специально подобранные коэффициенты сноса и диффузии, а $W(t)$ — стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния $\xi(0)$.

Поскольку $\xi(t)$ является в то же время однородным марковским процессом, коэффициенты сноса и диффузии могут быть заданы через его переходную вероятность

$$(3) \quad A(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x) P(x, h, dy), \quad B(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x)^2 P(x, h, dy),$$

если выполнено условие

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x|>\delta}^{\infty} (1 + (y - x)^2) P(x, h, dy) = 0 \quad \forall \delta > 0,$$

где $P(x, h, dy) = P\{\xi(t+h) \in E | \xi(t) = x\}$ обозначает переходную вероятность процесса $\xi(t)$.

Для нахождения коэффициентов $A(x), B(x)$ введем допущение о том, что переходную вероятность $P(x, h, \cdot)$ можно достаточно точно приблизить условным распределением $Law\{X(t+h) | X(t) = x\}$ исходного дискретного процесса $X(t)$. С учетом этого в (3) ин-

теграл заменяется на сумму по $y \in E$ с весами в виде переходных вероятностей $p_{x,y}(h) = P\{X(t+h) = y | X(t) = x\}$.

Поскольку пределы в (3) представляют собой операцию дифференцирования по h , получаем

$$A(x) = \sum_{y \in E} (y - x) \lambda_{x,y} = \lambda_{x,x+1} - \lambda_{x,x-1},$$

$$B^2(x) = \sum_{y \in E} (y - x)^2 \lambda_{x,y} = \lambda_{x,x+1} + \lambda_{x,x-1}, \text{ откуда}$$

$$(4) \quad A(x) = \alpha(1 - r(x)) - \mu(x), \quad B^2(x) = \alpha(1 - r(x)) + \mu(x).$$

Сделаем еще одно важное упрощение. Будем считать, что в выражении (4) вероятность отказа $r(x)$ определяется линейной зависимостью $r_0 + r_1 x$ без использования операции проектирования на отрезок (1). Тогда система (2) определяет модель диффузионного процесса с линейным сносом и диффузией

$$(5) \quad d\xi(t) = (a_0 + a_1 \xi(t)) dt + \sqrt{b_0 + b_1 \xi(t)} dW(t),$$

где коэффициенты выражаются через функции доступа и загрузки $r(x), \mu(x)$:

$$a_0 = \alpha(1 - r_0) - \mu_0, \quad a_1 = -\alpha r_1 - \mu_1$$

$$b_0 = \alpha(1 - r_0) + \mu_0, \quad b_1 = -\alpha r_1 + \mu_1$$

Итак, цель данной работы — исследовать точность диффузионной аппроксимации (5) для приближенного описания управляемой СМО $M_{\alpha(1-r)} | M_{\mu} | 1 | N - 1$, рассматриваемой в стационарном режиме. Точность диффузионной аппроксимации будем определять с помощью равномерной метрики между функциями распределения исходного дискретного процесса и соответствующего диффузионного процесса:

$$(6) \quad \delta = \sup_{x \in \mathbb{R}} |P\{X \leq x\} - P\{\xi \leq x\}|.$$

Здесь и далее X и ξ — обозначения случайных величин, имеющих стационарное распределение процессов $X(t)$ и $\xi(t)$ соответственно. Для визуального сравнения этих двух распределений будут использоваться графики двух функций

$$(7) \quad p(x) = P\{X = x\}, \quad p_{\xi}(x) = \lim_{x \in \Delta: |\Delta| \rightarrow 0} \frac{P\{\xi \in \Delta\}}{|\Delta|},$$

где $p(x)$ — вероятность состояния дискретного процесса, $p_{\xi}(x)$ — одномерная плотность диффузионного процесса.

Важной характеристикой СМО является средняя загрузка, т.е. среднее число заявок в системе $L = EX$. В качестве аппроксимации будет использоваться $L_{\xi} = E\xi$. Кроме того, для описания качества функционирования СМО вводятся три показателя: среднее время ожидания W ; доля отклоненных заявок R ; объем затраченных ресурсов M . Их аппроксима-

ции, вычисленные с помощью диффузионного процесса, обозначаются соответственно W_ξ , R_ξ и M_ξ .

4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИФFUЗИОННОГО ПРОЦЕССА

В силу $a_1 < 0$ уравнение (5) определяет отрицательную обратную связь. Поэтому процесс $\xi(t)$ — эргодический [10, 18], т.е. имеет место сходимость по распределению

$$(8) \quad \xi(t) \xrightarrow{d} \bar{\xi},$$

где распределение случайной величины $\bar{\xi}$ не зависит от выбора начального распределения $Law\{\xi(0)\}$. Распределение величины $\bar{\xi}$ будем называть *стационарным распределением диффузионного процесса*. Его конструкция выражается через гамма-распределение $\Gamma(a, \lambda)$, имеющее плотность

$$g(x; a, \lambda) = \frac{\lambda}{\Gamma(a)} (\lambda x)^{a-1} e^{-\lambda x}, x > 0$$

где a и λ — положительные параметры, $\Gamma(a)$ — гамма-функция Эйлера.

Если обозначить

$$(9) \quad \eta \sim \Gamma(a, \lambda), \quad a = \frac{2(a_0 b_1 - a_1 b_0)}{b_1^2}, \quad \lambda = \frac{2|a_1|}{|b_1|}, \quad c = -\frac{b_0}{b_1}$$

то параметры a и λ будут заведомо положительными. Поэтому указанная случайная величина η определена корректно. С ее помощью можно описать стационарное распределение диффузионного процесса.

Для этого укажем конструкцию случайной величины $\bar{\xi}$:

а) если $b_1 < 0$, то

$$(10) \quad \bar{\xi} = c - \eta, \quad \bar{\xi} \in (-\infty, c), \quad c > 0;$$

б) если $b_1 > 0$, то

$$(11) \quad \bar{\xi} = c + \eta, \quad \bar{\xi} \in (c, +\infty), \quad c < 0;$$

с) если же $b_1 = 0$, то $\bar{\xi}$ — нормальная случайная величина с параметрами

$$(12) \quad E\bar{\xi} = \frac{a_0}{|a_1|}, \quad D\bar{\xi} = \frac{b_0^2}{(2|a_1|)}.$$

Итак, в зависимости от знака коэффициента b_1 носитель стационарного распределения диффузионного процесса будет приходиться на левую или правую полуось. Условие $b_1 < 0$ или, что то же самое, $\alpha r_1 > \mu_1$ означает, что увеличение числа отказов происходит быстрее, чем наращивается интенсивность обработки.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Численный анализ качества предложенной аппроксимации проведем для двух вариантов управления рассматриваемой системы массового обслуживания. В первом случае управление будет определяться только интервалом доступа (x_0, x_1) при фиксированных параметрах обслуживания μ_0, μ_1 . Во втором варианте модели управления для заданного интервала доступа (x_0, x_1) изучим влияние на качество аппроксимации выбора параметров обрабатываемого устройства μ_0, μ_1 .

Итак, рассмотрим первый вариант, в котором параметры системы выбраны следующим образом:

$$N = 100, 10 < x_0 < 50, 80 < x_1 < 100, \mu_0 = 1.1, \mu_1 = 0$$

Показатель δ , определяющий расстояние (6) между стационарными распределениями исходного дискретного процесса $X(t)$ и его диффузионной аппроксимацией $\xi(t)$, лежит в диапазоне $\delta_{\min} < \delta < \delta_{\max}$, где $\delta_{\min} = 0.025$, $\delta_{\max} = 0.048$. Наименьшая погрешность аппроксимации δ_{\min} достигается при выборе максимально возможного интервала доступа $(x_0, x_1) = (10, 100)$. Наихудший случай с точки зрения величины δ_{\max} реализуется для интервала $(x_0, x_1) = (50, 80)$, который является минимально возможным на рассматриваемом множестве параметров системы. Полученный результат можно объяснить тем, что при наиболее широком интервале доступа вероятность отказа $r(t)$ наилучшим образом аппроксимируется линейной зависимостью, которая используется в модели диффузионного процесса (5). И наоборот, узкий интервал доступ может привести к тому, что модель процесса с линейной диффузией (5) перестанет служить адекватным описанием управляемой системы массового обслуживания. Тем не менее для рассматриваемого набора параметров даже наихудший уровень аппроксимации остается приемлемым. Это подтверждается сравнением значений средней загрузки: $L = L_\xi = 34.29$ при $\delta = \delta_{\min}$ и $L = 57.91 L_\xi = 58.11$ при $\delta = \delta_{\max}$. Кроме того, в справедливости данного вывода можно убедиться непосредственно, визуальнo сравнив стационарные вероятности дискретного процесса $p(x)$ и стационарную плотность диффузионного процесса $p_\xi(x)$ (см. рис. 2).

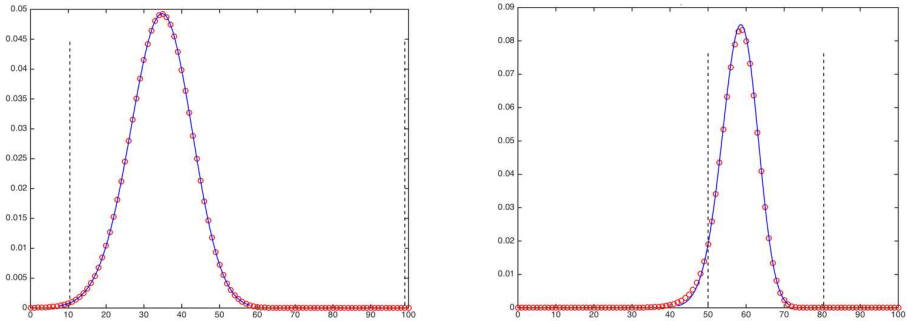


Рис. 2. Вероятности состояний дискретного процесса $p(x)$ (кружочки) и плотность диффузионного процесса $p_{\xi}(x)$ (сплошная кривая) вместе с границами интервала доступа (x_0, x_1) (штриховые линии) при фиксированных параметрах загрузки: слева — случай $\delta = \delta_{\min}$, справа случай $\delta = \delta_{\max}$.

Дальнейшие результаты сравнения при различном объеме очереди N приведены в следующей таблице.

N	δ_{\max}	L	L_{ξ}	W	W_{ξ}	R	R_{ξ}	M	M_{ξ}
50	0.0852	28.5406	29.0533	29.3120	26.4121	0.3510	0.2667	1.1	1.1
100	0.0485	57.9109	58.1067	50.1537	44.5091	0.3495	0.2667	1.1	1.1
500	0.0189	290.532	290.533	250.423	222.545	0.3483	0.2667	1.1	1.1
1000	0.0134	581.0667	581.0667	500.730	445.0909	0.3482	0.2667	1.1	1.1
2000	0.0094	1162.13	1162.13	1001.34	890.1818	0.3481	0.2667	1.1	1.1

Теперь рассмотрим второй вариант управляемой модели, в которой выбран фиксированный интервал доступа с границами $x_0 = 20$ и $x_1 = 80$ при $N=100$. Множество значений параметров обслуживания μ_0, μ_1 описывается следующими условиями:

$$0.2 < \mu_0 < 1.8, 0 < \mu_1 < 0.025.$$

Второе ограничение вытекает из предположения $b_1 < 0$ или, что то же самое, $\mu_1 < \alpha/(x_1 - x_0)$, которое также означает, что система находится в загруженном состоянии. Случай $b_1 > 0$ соответствует малой нагрузке системы, при которой носитель диффузионного процесса располагается за пределами исходного интервала состояний. На рис.3 изображены функции $p(x)$ и $p_{\xi}(x)$, определяющие стационарные распределения в исходной и приближенной модели.

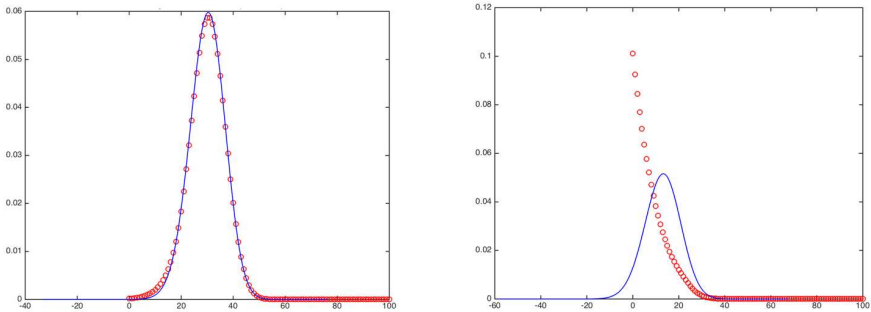


Рис. 3. Вероятности состояний дискретного процесса $p(x)$ (кружочки) и плотность диффузионного процесса $p_{\xi}(x)$ (сплошная кривая) при фиксированном интервале доступа: слева - случай $\delta = 0.032$; справа - случай $\delta = 0.034$.

На левом графике рис.3 представлен случай, в котором метрика δ принимает значение 0.032, т.е. качество диффузионной аппроксимации оказывается вполне приемлемым, хотя носитель диффузионного процесса немного выходит за границы заданного интервала (x_0, x_1) .

Для рассматриваемого множества параметров качество диффузионной аппроксимации может оказаться неприемлемым. Этот случай изображен на правом графике рис.3. Здесь расстояние между исходным распределением и его аппроксимации достигает $\delta = 0.034$. Как видно, носитель стационарного распределения диффузионного процесса находится вне большей части интервала доступа. Именно это обстоятельство приводит к большой погрешности аппроксимации.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена модель одноканальной системы массового обслуживания с управляемыми доступом и загрузкой. Вероятность отклонения и интенсивность обслуживания предполагались линейно зависящими от состояния системы. Предложена диффузионная аппроксимация на базе стохастического дифференциального уравнения с линейными коэффициентами сноса и диффузии. Для трех показателей работы системы (среднее время пребывания, доля отказов, средний объем ресурсов) определена зависимость от управляющих параметров. Численный анализ показал, что качество диффузионной аппроксимации стационарного распределения дискретного марковского процесса зависит от вероятности попадания диффузионного процесса в интервал доступа. Если эта вероятность близка к единице (это характерно для ситуации сильной загрузки), то модель диффузионного процесса можно использовать для приближенного описания управляемой одноканальной системы массового обслуживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов С. Н. Основы телетрафика мультисервисных сетей.// М.: Эко-Трендз, 2010.
2. Boucherie R. J., van Dijk N. M. Queueing Networks: A Fundamental Approach.// New York: Springer, 2011.
3. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Управляемые марковские процессы и их приложения. М.: Наука, 1975.
4. Stidham S., Weber R. A survey of Markov decision models for control of networks of queues.// Queueing Systems, 1993, Vol. 13, no. 1., Pp. 291-314.
5. Anisimov V. V. Switching processes in queueing models.// Hoboken: J. Wiley&Sons, 2008.
6. Abramov V. M. Asymptotic methods for queueing system and networks with application to telecommunications. Monash University, 2004.
7. Миллер А. Б. Динамическое управление доступом и скоростью обслуживания при активных пользователях.// Автоматика и телемеханика, 2010, № 9. С. 70-82.
8. Мясников Д. В., Семенихин К. В. Управление одноканальной системы массового обслуживания при наличии ограничений// Изв. РАН. Теория и системы управления, 2016, № 1, С. 66-85.
9. Миллер Д. М., Миллер Г. Б., Семенихин К. В. Регуляризация задачи оптимального управления марковским процессом с конечным числом состояний при наличии ограничений.// Автоматика и телемеханика, 2016, № 9, С. 96-123.
10. Alfonsi A. Affine Diffusions and Related Processes: Simulation, Theory and Applications. Springer, 2015.
11. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.
12. Floyd S., Jacobson V. Random early detection gateways for congestion avoidance.// IEEE/ACM Transactions on Networking, 1993, Vol. 1, no. 4, Pp. 397-413.
13. Васенин В. А., Симонова Г. И. Математические модели управления трафиком в Интернет: новые подходы на основе схем TCP/AQM // Автоматика и телемеханика, 2005, № 8, С. 94-107.

Работа поступила 20.02.2019г.

ГАРАНТИРУЮЩЕЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ПО ВЕРОЯТНОСТНОМУ КРИТЕРИЮ ПРИ НАЛИЧИИ УНИМОДАЛЬНЫХ ПОМЕХ

А.С. Архипов, К.В. Семенихин

Рассматривается задача линейного параметрического оценивания в одномерной модели движения материальной точки при наличии измерительных ошибок с неопределенным симметричным унимодальным распределением, но известными ковариациями и дисперсиями. Установлены гарантированные границы для вероятности превышения ошибкой оценивания заданного порога с учетом априорных ограничений на начальное положение и скорость. Проведено сравнение качества ридж-оценок для нескольких классов распределений помех.

We consider the problem of linear parametric estimation in a one-dimensional model of the motion of a material point in the presence of measurement errors with an indefinite symmetric unimodal distribution, but known covariances and variances. Guaranteed limits are established for the probability of an error exceeding the estimated threshold given the a priori restrictions on the initial position and speed. A comparison of the quality of ridge estimates for several classes of interference distributions has been made.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Вероятностный критерий, унимодальное распределение, оценивание параметров движения, ридж-оценка, гарантирующий подход.

ДЛЯ ЦИТАТЫ

А.С. Архипов, К.В. Семенихин. Гарантирующее оценивание параметров одномерной модели движения по вероятностному критерию при наличии унимодальных помех // Моделирование и анализ данных. 2019. №2. С.31-38.

A.S. Arkhipov, K.V. Semikhin. Guaranteed parameter estimation by probabilistic criterion for one-dimensional motion model with unimodal observation noise. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis (Russia). 2019, no.2, pp.31-38.

1. ВВЕДЕНИЕ

Различные постановки задач параметрического оценивания остаются предметом изучения многих теоретических исследований [1]. Практическое применение оценок требует более осторожных выводов об их точности и надежности особенно в ситуации небольшого числа наблюдений и неопределенности распределения ошибок [2]. Один из подходов к повышению робастности статистических решений состоит в определении наилучших границ их качества при допущении всевозможных распределений с ограниченными или фиксиро-

ванными моментными характеристиками второго порядка [3]. Однако такой класс распределений приводит к достаточно пессимистическим выводам о вероятностных характеристиках точности робастных оценок. Более реалистичным выглядит использование дополнительной непараметрической информации о распределении, которое формулируется в виде естественного требования унимодальности [4]. Если качество оценок описывается вероятностью выхода ошибки за определенные пределы [5], то гарантированные границы этого вероятностного критерия качества можно получить на основе недавно разработанных обобщений неравенства Гаусса [6,7].

В настоящей работе рассматривается задача оценивания будущего положения объекта, который движется равномерно и прямолинейно, а его текущее положение наблюдается с учетом измерительных помех, имеющих неопределенное симметричное унимодальное распределение, но известную ковариационную матрицу. Описанная задача решается на основе гарантирующего подхода, который позволяет определить верхнюю границу вероятности превышения заданного порога ошибки с учетом априорных ограничений на начальное положение объекта и его скорость. Чтобы учесть априорную информацию о неизвестных параметрах, вместо оценок метода наименьших квадратов (МНК) используются их регуляризованные версии — так называемые ридж-оценки [8]. Проводится сравнительный анализ нескольких вариантов ридж-оценок при наличии разного уровня информированности о распределении помех.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим кинематическую модель движения материальной точки вдоль прямой. Движение из начального положения x^0 с постоянной скоростью v описывается линейной функцией

$$x(t) = x^0 + vt$$

Относительно параметров известно, что

$$(1) \quad |x^0 - x^*| \leq \delta \quad |v - v^*| \leq \varepsilon,$$

где x^* , v^* — заданные опорные значения.

Допустим, что имеются n наблюдений

$$Y(t_k) = x(t_k) + \eta(t_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

где величины $\{\eta(t_k), k = 1, \dots, n\}$ составляют вектор $\eta \in \mathbb{R}^n$, имеющий линейно унимодальное распределение, симметричным относительно нулевой моды, и ковариационную матрицу $\sigma^2 K$, где σ^2 — известная дисперсия, а K — корреляционная матрица, задаваемая в виде

$$\sigma^2 K = \{\rho(t_k - t_l)\}_{k,l=1,\dots,n}$$

С помощью автокорреляционной функции $\rho(t) = e^{-|t|/\tau}$ выхода аperiodического звена с входом в виде стационарного белого шума и параметром запаздывания τ . Класс описанных распределений обозначим \mathcal{U} .

Предположим, что оцениванию подлежит будущее положение объекта $Z = x(t')$, $t' > t_n$. Качество оценок \tilde{Z} будем описывать функционалом

$$(2) \quad P\{|\tilde{Z} - Z| \geq h\}$$

т.е. вероятностью превышения заданного порога ошибки h .

Если ввести обозначения

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ t_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} x^0 \\ v \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 2}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y(t_1) \\ \vdots \\ Y(t_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

то модель наблюдения можно записать в виде уравнений линейной регрессии

$$Z = \langle c, u \rangle, \quad Y = Cu + \eta$$

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для приведенной модели наблюдения требуется решить задачу оценивания положения объекта $Z = x(t')$ с учетом ограничений на неизвестные параметры (1) при различных гипотезах о распределении помех.

Рассмотрим следующие три гипотезы:

1) $\eta \sim \mathcal{N}$ — гипотеза о нормальном распределении, точнее $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 K)$;

2) $\eta \sim \mathcal{U}$ — описанное выше предположение об унимодальности и симметричности распределения вектора помех η ;

3) $\eta \sim \mathcal{P}$ — предположение о том, что распределение вектора η может быть любым.

Для всех перечисленных выше гипотез остается в силе наличие фиксированных моментных характеристик

$$M\eta = 0, \quad cov\{\eta, \eta\} = \sigma^2 K.$$

Для заданной оценки \tilde{Z} определим максимальное (т.е. наихудшее) значение вероятности того, что ошибка превысит заданный порог:

$$(3) \quad \pi^{\mathcal{H}} = \sup_{\eta} \sup_u P\{|\tilde{Z} - Z| \geq h\}$$

где распределение вектора помех η описывается соответствующей гипотезой \mathcal{H} , а вектор параметров u подчиняется ограничениям (1).

Задача гарантирующего оценивания по вероятностному критерию состоит в нахождении вероятностной границы (3) для заданной оценки. При сравнении нескольких оценок более предпочтительной стоит считать ту, которая дает наименьшее значение вероятностному критерию (2). Таким образом, качество оценок определяется их надежностью из расчета на наихудший случай.

4. ОЦЕНКИ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Будем рассматривать так называемые ридж-оценки, которые представляют собой регуляризацию оценок обобщенного метода наименьших квадратов (ОМНК):

$$(4) \quad \begin{aligned} \tilde{Z} &= \langle c, \tilde{u} \rangle, \quad \tilde{u} = u^* + F(Y - Cu^*), \quad \tilde{u} = \text{col}[\tilde{x}^0, \tilde{v}], \\ F &= ((\sigma/\gamma)^2 \text{diag}[\delta^{-2}, \varepsilon^{-2}] + C^T K^{-1} C)^{-1} C^T K^{-1}, \end{aligned}$$

Здесь γ - положительный коэффициент, отвечающий за степень регуляризации: чем больше γ , тем ближе матрица F к оценивателю ОМНК

$$G = (C^T K^{-1} C)^{-1} C^T K^{-1}$$

Определим среднеквадратическую (с.к.) погрешность указанных оценок

$$\text{RMSE} = \sqrt{M(\tilde{Z} - Z)^2}.$$

Введем вектор отклонения параметров от их опорных значений

$$\vartheta = u - u^* = \text{col}[\Delta x^0, \Delta v], \quad \Delta x^0 = x^0 - x^*, \quad \Delta v = v - v^*.$$

Тогда ошибка оценки будет равна

$$\tilde{Z} - Z = \langle c, u^* + F(C(u - u^*) + \eta) \rangle - \langle c, u \rangle = \langle c, (FC - I_2)\vartheta \rangle + \langle c, F\eta \rangle$$

откуда получаем выражение для смещения оценки

$$m = M\{\tilde{Z} - Z\} = \langle g, \vartheta \rangle,$$

где обозначено $g = (FC - I_2)^T c$.

Получаем выражение для дисперсии оценки

$$s^2 = \sigma^2 \|f\|^2,$$

если обозначить $f = (FT)^T c$.

Максимальное смещение при ограничениях (1) равно

$$\bar{m} = \max_u M\{\tilde{Z} - Z\} = \nu(g),$$

с учетом того, что $\nu(g)$ — норма, определенная на векторах $a = \text{col}[a_1, a_2]$ по правилу

$$\nu(a) = \max\{a_1 \Delta x^0 + a_2 \Delta v : |\Delta x^0| \leq \delta, |\Delta v| \leq \varepsilon\} = \delta|a_1| + \varepsilon|a_2|.$$

Таким образом, с.к. погрешность и ее наилучшее значения равны соответственно:

$$\text{RMSE} = \sqrt{m^2 + s^2}, \quad \overline{\text{RMSE}} = \sqrt{\bar{m}^2 + \bar{s}^2}.$$

5. ВЕРОЯТНОСТНЫЙ КРИТЕРИЙ

Рассмотрим сначала гипотезу о гауссовском распределении помех:

если $\eta \sim \mathcal{N}$, то

$$(5) \quad \pi^{\mathcal{N}} = \Psi\left(\frac{h-\bar{m}}{s}\right) + \Psi\left(\frac{h+\bar{m}}{s}\right), \text{ где } \Psi(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

Теперь рассмотрим гипотезу $\eta \sim \mathcal{U}$. В силу [7] справедлив следующий факт: если смещение и порог ошибки связаны неравенством

$$\bar{m} < (1 - 1/\sqrt{2})h,$$

то вероятностная граница (3) на классе симметричных унимодальных распределений $\eta \sim \mathcal{U}$ определяется правой частью неравенства Гаусса

$$(6) \quad \pi^{\mathcal{U}} = \begin{cases} \frac{4s^2}{9h^2}, & s \leq h\sqrt{3}/2 \\ 1 - \frac{h}{s\sqrt{3}}, & s \geq h\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

Общее выражение для искомой границы дано в [7]. Соответствующее наихудшее распределение можно описать так. Пусть E — случайная величина, распределенная по закону $\mathcal{U}_h(s^2)$, который в случае а) представляет собой смесь равномерного распределения $\mathcal{R}(-3h/2, 3h/2)$ с весом $q = 4s^2 / (3h^2)$ и вырожденного δ_0 с весом $1-q$, а в случае б) $\mathcal{U}_h(s^2) = \mathcal{R}(-s\sqrt{3}, s\sqrt{3})$.

Определим вектор помех в виде

$$(7) \quad \eta = T\{E|f|^{-2}f + \sigma(I_n - |f|^{-2}ff^T)\zeta\},$$

где ζ — стандартный n -мерный гауссовский вектор, независимый от случайной величины E .

Важно отметить, что вектор имеет линейно унимодальное распределение, так как при любом выборе детерминированного вектора $g \in \mathbb{R}^n$ величина $\langle g, \eta \rangle$ будет унимодальной, как сумма двух независимых симметричных унимодальных величин. При этом распределение вектора (7) симметрично относительно нуля. Вычислим ковариационную матрицу случайного вектора, заключенного в фигурных скобках выражения (7).

В силу равенства $s^2 = \sigma^2|f|^2$, условия независимости и свойств матрицы ортогональной проекции, получаем требуемую ковариационную матрицу:

$$s^2|f|^{-4}ff^T + \sigma^2(I_n - |f|^{-2}ff^T) = \sigma^2I_n.$$

Наконец, ошибка оценки совпадет с величиной E с точностью до смещения m , т.е. $\tilde{Z} - Z = m + E$. Если же выбрать параметры так, чтобы

$$u = u^* + \text{col}[\delta \cdot \text{sign} g_1, \varepsilon \cdot \text{sign} g_2],$$

то получим ошибку оценивания с максимальным смещением \bar{m} :

$$\tilde{Z} - Z = \bar{m} + E$$

Теперь рассмотрим гипотезу $\eta \sim \mathcal{P}$, которая означает, что распределение вектора помех η может быть любым. В этом случае вероятностная граница определяется из неравенства Селберга [9]:

$$(8) \quad \pi^{\mathcal{P}} = \begin{cases} \frac{s^2}{s^2 + (h - \bar{m})^2}, & \text{а) } s^2 \leq \bar{m}(h - \bar{m}), \\ \frac{\bar{m}^2 + s^2}{h^2}, & \text{б) } \bar{m}(h - \bar{m}) \leq s^2 \leq h^2 - \bar{m}^2, \\ 1, & \text{в) } h^2 - \bar{m}^2 \leq s^2 \end{cases}$$

где предполагается $\bar{m} < h$.

Таким образом для трех рассматриваемых гипотез, их вероятностный критерий определяется выражениями (5), (6) и (8).

6. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В описанной выше модели было проведено два эксперимента, обозначаемые далее №1, №2. Рассмотрим численный эксперимент № 1. Для него были взяты следующие параметры:

$$x^* = 2000, \quad x^0 = 2800, \quad \delta = 1000 \text{ (м)},$$

$$v^* = 180, \quad v = 205, \quad \varepsilon = 50 \text{ (м / с)},$$

$$Z = 17150, \quad h = 1000, \quad \sigma = 500 \text{ (м)}, \quad \tau = 10 \text{ (1 / с)}$$

$$t_1 = 15, \quad t_n = 60, \quad t' = 70 \text{ (с)}, \quad n = 10$$

Вектор помех был смоделирован согласно распределению, наихудшему на классе \mathcal{U} из расчета на ридж-оценку (4) с параметром регуляризации $\gamma = 1$. Вес вырожденного распределения δ_0 в распределении ошибки оценивания составил $1 - q = 0.6727$.

В таблице 1 приведены результаты расчетов. Каждая строка соответствует характеристикам ридж-оценки, построенной при данном параметре регуляризации γ . Случай $\gamma = \infty$ соответствует оценке ОМНК.

Как видно, среди указанного набора значений параметра γ случай $\gamma = 1$ дает наименьшее значение гарантированного значения вероятностного критерия, рассматриваемого на классе унимодальных распределений \mathcal{U} с учетом априорных ограничений (1). Гипотеза \mathcal{N} о гауссовском распределении помех приводит к наименьшим значениям вероятности превышения допустимого порога ошибки. Однако предположение \mathcal{P} дает неоправданно завышенное значение вероятностного критерия (более чем в 4 раза по сравнению со случаем \mathcal{N}). В то же время гипотеза \mathcal{U} , используемая для нахождения робастного статистического решения, демонстрирует приемлемую надежность оценивания.

Таблица 1. Результаты численного эксперимента №1

γ	$\widetilde{x^0}$ (м)	\widetilde{v} (м / с)	\widetilde{Z} (м)	\bar{m} (м)	S (м)	$\overline{\text{RMSE}}$ (м)	$\pi^{\mathcal{N}}$	$\pi^{\mathcal{U}}$	$\pi^{\mathcal{P}}$
∞	3577	192	17021	0	563	563	0.0759	0.1410	0.3174



3	3516	193	17050	37	552	553	0.0707	0.1355	0.3061
2	3446	195	17082	78	540	545	0.0667	0.1295	0.2974
1	3179	200	17195	243	495	552	0.0693	0.1091	0.3045
0.5	2755	208	17293	544	433	695	0.1463	0.1960	0.4741

Теперь рассмотрим результаты численного эксперимента № 2. Он был реализован при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned}
 x^* &= 2000, \quad x^0 = 2160, \quad \delta = 200 \text{ (м)}, \\
 v^* &= 180, \quad v = 205, \quad \varepsilon = 50 \text{ (м / с)}, \\
 Z &= 16510, \quad h = 2000, \quad \sigma = 1000 \text{ (м)}, \quad \tau = 10 \text{ (1 / с)} \\
 t_1 &= 15, \quad t_n = 60, \quad t' = 70 \text{ (с)}, \quad n = 1
 \end{aligned}$$

Наихудшее распределение вектора помех на классе \mathcal{U} было построено для ридж-оценки с параметром регуляризации $\gamma = 0.6$. Вес вырожденного распределения в распределении ошибки составил $1 - q = 0.7976$.

На рис. 1 изображена траектория движения объекта, его ридж-оценка (для $\gamma = 0.6$) и оценка ОМНК.

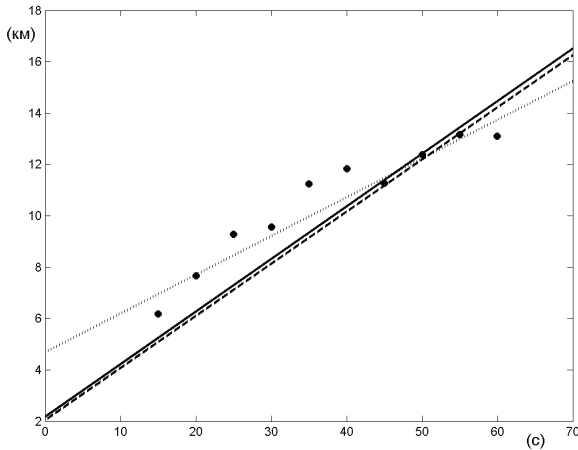


Рис. 1. Истинная траектория (сплошная) вместе с ридж-оценкой (штриховая) и ОМНК-оценкой (пунктир), построенными по наблюдениям (точки) в эксперименте № 2.

Как видно, ридж-оценка существенно превосходит ОМНК-оценку по точности предсказания терминального положения. То же заключение можно сделать о характеристиках надежности указанных оценок (см. таблицу 2). Как и в эксперименте № 1, соотношение между гарантированными значениями вероятностного критерия остается прежним: гипотеза \mathcal{N} дает самый оптимистичный результат, класс \mathcal{U} приводит к более осторожным выводам, а предположение \mathcal{P} оказывается слишком консервативным.

Таблица 2. Результаты численного эксперимента №2

γ	\tilde{x}^0 (м)	\tilde{v} (м/с)	\tilde{Z} (м)	\tilde{m} (м)	s (м)	$\overline{\text{RMSE}}$ (м)	$\pi^{\mathcal{N}}$	$\pi^{\mathcal{U}}$	$\pi^{\mathcal{P}}$
∞	4685	151	15256	0	1127	1127	0.0759	0.1410	0.3174
2	2253	203	16442	154	918	931	0.0316	0.0936	0.2166
1	2074	205	16434	317	871	927	0.0305	0.0843	0.2147
0.6	2032	203	16259	632	779	1003	0.0399	0.0721	0.2449
0.3	2011	196	15716	1578	522	1662	0.2095	0.2667	0.6048

В заключение необходимо отметить, что коэффициенты ридж-оценки можно подобрать из условия минимума соответствующей вероятностной границы. Однако изучение данной задачи оптимизации выходит за рамки настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Simon D.* Optimal State Estimation. Kalman, H-infinity, and Nonlinear Approaches. Wiley, 2006.
2. *Maryak J.L., Spall J.C., Heydon B.D.* Use of the Kalman filter for inference in state-space models with unknown noise distributions // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. V. 49. P. 87-90.
3. *Delage E., Ye Y.* Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems // Operations Research. 2010. V. 58. P. 595-612.
4. *Dharmadhikari S., Joag-Dev K.* Unimodality, Convexity, and Applications. San Diego: Academic, 1988.
5. *Панков А.Р., Семенихин К.В.* О минимаксном оценивании по вероятностному критерию // Автоматика и телемеханика. 2007. № 3. С. 66-82.
6. *Van Parys B.P.G., Goulart P.J., Kuhn D.* Generalized Gauss inequalities via semidefinite programming // Math. Program. 2016. V. 156. P. 271-302.
7. *Семенихин К.В.* Двусторонняя вероятностная граница для симметричной унимодальной случайной величины // Автоматика и телемеханика. 2019. №3. В печати.
8. *Демиденко Е.З.* Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика, 1981.
9. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. — М.: Наука, 1976.

Работа поступила 20.02.2019г.

АНАЛИЗ ДАННЫХ

УДК 004.942

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ФИНАНСОВОГО ИНДЕКСА RTSI

Е.А. Кускова, Ю.С. Кан

В статье рассматривается задача моделирование динамики российского финансового индекса RTSI, т.е. вычисление его математического ожидания с помощью трех различных моделей: выборочных моментов, AR-модели и ARCH-модели. Производится сравнительный анализ этих моделей с использованием трех различных критериев. Все расчеты производились на основе реальных данных – значений индекса RTSI за период 2008-2015 г.г.

The paper deals with the problem of modeling the dynamics of the Russian financial index RTSI, i.e. calculating its expectation using three different models: sampling moments, the AR-model and the ARCH-model. A comparative analysis of these models using three different criteria is presented. All calculations were made on the basis of real data about the values of the RTSI index for the time period 2008-2015 years.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Выборочные моменты, индекс RTSI, AR-модель, ARCH-модель.

ДЛЯ ЦИТАТЫ

Кускова Е.А., Кан Ю.С. Моделирование динамики финансового индекса RTSI // Моделирование и анализ данных. 2019. №2. С.39-47.

Kuskova E.A., Kan Yu.S. Modelling the dynamics of the RTSI index. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis (Russia). 2019, no.2, pp.39-47

1. ВВЕДЕНИЕ

Фондовые рынки являются важным инструментом привлечения финансовых ресурсов в экономику страны.

Значение фондового рынка для экономики любой страны трудно переоценить. Во многих странах фондовый рынок рассматривают как национальное богатство, которое нужно охранять и поддерживать в нормальном состоянии. Именно на фондовом рынке встречаются продавцы и покупатели капитала. С одной стороны, фирмы и корпорации находят здесь инвестиции для целей своего развития, что в конечном итоге обеспечивает создание новых рабочих мест и выпуск продукции для личного и производительного потребления. Таким образом, экономика страны и благосостояние граждан во многом определяется развитием эффективно функционирующего фондового рынка. С другой стороны, лица имеющие свободные денежные средства, заинтересованы в эффективном их использовании. Если создан хорошо функционирующий фондовый рынок, на котором совершаются регулярные сделки с ценны-

ми бумагами, обеспечивающие извлечение инвестором прибыли, то он будет делать ещё новые инвестиции.

Развитие фондового рынка и его умелое регулирование со стороны государства во многом определяют мобильность экономики, её способность адаптироваться к новым условиям. Фондовый рынок является важнейшим механизмом, обеспечивающим эффективное функционирование всей экономики, является важнейшим показателем уровня зрелости экономического развития страны.

Вложение в ценные бумаги сегодня позволяет не только сохранить имеющийся капитал, защитив его от инфляции, но и значительно его увеличить. Это направление позволяет осуществлять успешные долгосрочные и краткосрочные инвестирования. Оно выступает в качестве источника стабильной прибыли для многих отечественных и иностранных игроков. Ценные бумаги набирают оборот и дают владельцам практически неограниченные возможности для разнообразных манипуляций для достижения основной цели - получения прибыли.

Одним из важнейших макроэкономических показателей состояния российского финансового рынка является биржевой индекс RTSI. В соответствии с классической моделью ценообразования CAPM (Capital Asset Pricing Model) [1,2], он является главным фактором, влияющим на поведение цен рискованных финансовых инструментов. При использовании CAPM принято считать, что значение индекса пропорционально цене индексного портфеля. В настоящее время проблема моделирования динамики биржевых индексов является нерешенной. В настоящей статье делается попытка провести сравнительный анализ некоторых популярных моделей [3,4] для прогнозирования российского индекса RTSI на основе статистических данных о его поведении в прошлом.

2. МЕТОД ВЫБОРОЧНЫХ МОМЕНТОВ

Для оценки математического ожидания использовалась стандартная формула выборочного момента, в которой используются прошлые значения цен биржевого индекса.

$$\bar{M}[S_T] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i. \quad (1)$$

На рис. 1 можно увидеть динамику индекса RTSI, посчитанную данным способом. В каждый момент времени осреднение (1) выполнялось по статистическим данным, включающим дневные цены закрытия для индекса RTSI за предшествующие два месяца. На всех рисунках квадратами обозначены реальные значения индекса RTSI на конец каждого двухмесячного периода.

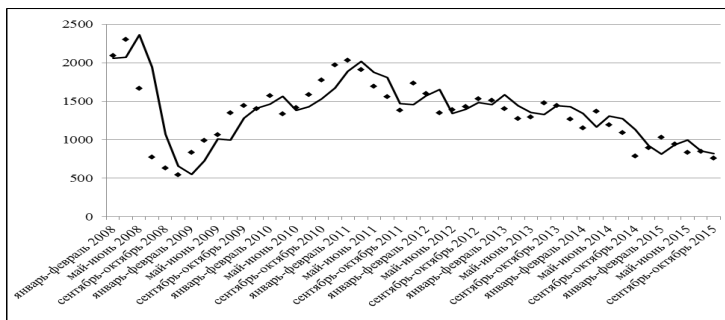


Рис. 1. Динамика оценки индекса RTSI с использованием формулы выборочного момента

3. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦЕН

В соответствии с современными представлениями [4], цена S_n рискованного финансового инструмента, в частности индексного портфеля, представляется в виде

$$S_n = S_0 e^{H_n} \quad (2)$$

где $H_n = h_1 + \dots + h_n, h_0 = 0, n \geq 0$.

Таким образом

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}} = \ln \left(1 + \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}} \right).$$

В [4] предложено строить модели динамики именно для случайных величин h_n .

4. AR-МОДЕЛЬ

Говорят, что последовательность $h = (h_n)_{n \geq 1}$ подчиняется авторегрессионной модели $AR(p)$ порядка p если:

$$h_n = \mu_n + \sigma \varepsilon_n$$

где $\mu_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \dots + a_p h_{n-p}, \varepsilon_n$ - стандартная гауссовская последовательность (дискретный белый шум).

Рассмотрим частный случай $p = 1$:

$$h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \sigma \varepsilon_n.$$

Рекуррентным образом находим, что

$$h_n = a_0(1 + a_1 + \dots + a_1^{n-1}) + a_n h_0 + \sigma(\varepsilon_n + a_1 \varepsilon_{n-1} + \dots + a_1^{n-1} \varepsilon_1). \quad (3)$$

Свойства последовательности $h = (h_n)_{n \geq 1}$ существенным образом зависят от параметра a_1 .

Из (3) находим, что

$$M[h_n] = a_1^n M[h_0] + a_0(1 + a_1 + \dots + a_1^{n-1}) \quad (4)$$

для $n - k \geq 1$

Из (4) видно, что в случае $|a_1| < 1$ и $M[h_0] < \infty$ при $n \rightarrow \infty$

$$M[h_n] = a_1^n M[h_0] + \frac{a_0(1 - a_1^n)}{1 - a_1} \rightarrow \frac{a_0}{1 - a_1}.$$

Если начальное распределение для h_0 является гауссовским $h_0 \sim N\left(\frac{a_0}{1-a_1}, \frac{\sigma^2}{1-a_1^2}\right)$, то $h = (h_n)_{n \geq 1}$ образует гауссовскую последовательность со следующими числовыми характеристиками:

$$M[h_n] = \frac{a_0}{1-a_1}, \quad (5)$$

$$D[h_n] = \frac{\sigma^2}{1-a_1^2}. \quad (6)$$

Теперь рассмотрим вопросы, связанные с оценкой параметров $\theta = (a_0, a_1, \dots, a_p, \sigma)$ авторегрессионной модели $AR(p)$. Если предполагать, что белый шум в широком смысле является гауссовским, то основным методом оценивания является метод максимального правдоподобия, согласно которому в качестве оценки параметров берется значение

$$\widehat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} p_{\theta}(h_1, h_2, \dots, h_n),$$

где $p_{\theta}(h_1, h_2, \dots, h_n)$ - совместная плотность вектора (h_1, h_2, \dots, h_n)

Для $AR(1)$ модели $\theta = (a_0, a_1)$ будем считать $\sigma > 0$ известным параметром $h_0 = 0, n \geq 1$ поэтому

$$p_{\theta}(h_1, h_2, \dots, h_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(h_k - a_0 - a_1 h_{k-1})^2}{\sigma^2}\right\}.$$

Оценка $\widehat{\theta} = (\widehat{a}_0, \widehat{a}_1)$ определяется из условия обращения в минимум функции

$$\Psi(a_0, a_1) = \sum_{k=1}^n (h_k - a_0 - a_1 h_{k-1}).$$

Видно, что

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial a_0} = 2 \sum_{k=1}^n (h_k - a_0 - a_1 h_{k-1}) = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial a_1} = 2 \sum_{k=1}^n (h_k - a_0 - a_1 h_{k-1}) h_{k-1} = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему линейных уравнений, находим оценки \widehat{a}_0 и \widehat{a}_1 .

Вычислим математическое ожидание индекса с учетом вероятностного представления цен (2):

$$\begin{aligned}
 M[e^{H_n}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^x f_{H_n}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2 - 2\sigma^2 x}{2\sigma^2}} dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(m+\sigma^2)^2}{2}} dx = e^{\frac{m+\sigma^2}{2}}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$M[e^{H_n}] = e^{\frac{m+\sigma^2}{2}}.$$

Пользуясь свойством математического ожидания, получим

$$M[S_n] = S_0 e^{\frac{m+\sigma^2}{2}}, \quad (7)$$

где m, σ – моментные характеристики случайной величины H_n , которые с учетом (5),(6) можно вычислить следующим образом:

$$m = M[H_n] = \frac{na_0}{1 - a_1}, \quad (8)$$

$$\sigma^2 = D[H_n] = \frac{\hat{\sigma}^2 n}{1 - a_1^2} \left(1 + \sum_{k=1}^n a_1^k\right), \quad (9)$$

где

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{k=1}^n (h_k - a_0 - a_1 h_{k-1})^2.$$

На рис. 2 можно увидеть динамику индекса RTSI, построенную с помощью $AR(1)$ модели.

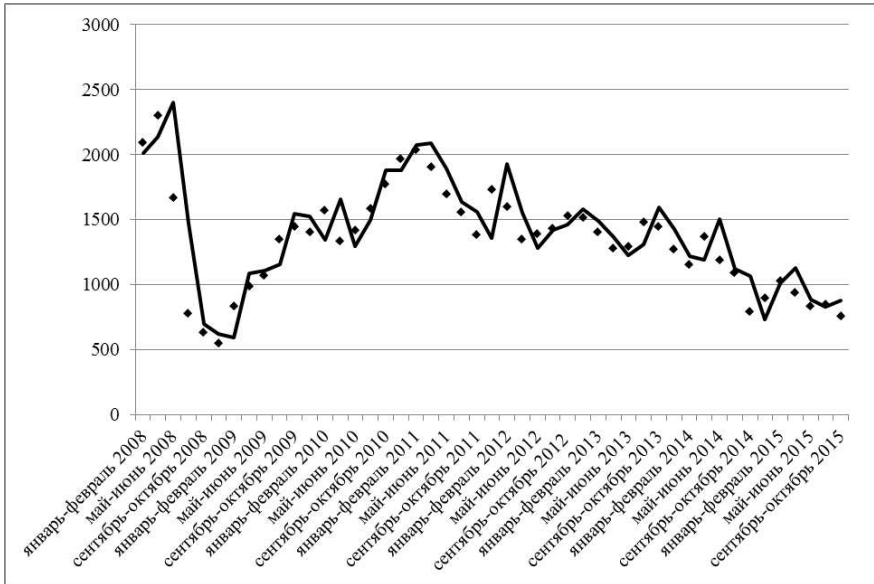


Рис. 2. Динамика оценки индекса RTSI, построенная с помощью AR-модели

5. ARCH-МОДЕЛЬ

Рассмотрим модель

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad (10)$$

где σ_n определяется следующим образом

$$\sigma_n^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i h_{n-i}^2.$$

Для $p = 1$

$$\sigma_n^2 = a_0 + a_1 h_{n-1}^2.$$

Для последовательности $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ можно выделить следующие свойства:

$$M[h_n] = 0,$$

$$M[h_n^2] = D[h_n] = a_0 + M[a_1 h_{n-1}^2].$$

В предположении, что $0 < a_1 < 1$, получаем

$$M[h_n^2] = \frac{a_0}{1 - a_1}.$$

Для оценки параметров a_0 и a_{01} используется метод моментов, который заключается в решение следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{a_0}{1-a_1} = \sum_{k=1}^n \frac{h_k^2}{n-1} \\ \frac{3a_0^2(1+a_1)}{(1-a_1)(1-3a_1^2)} = \sum_{k=1}^n \frac{h_k^4}{n-1}. \end{cases}$$

Для вычисления математического ожидания значений индекса RTSI с учетом вероятного перерасчета цен используется метод Монте-Карло, суть которого заключается в моделировании реализаций последовательности (10) при помощи генерации случайной величины ε_n . Это повторяется много раз и на основе полученных случайных данных оценивается требуемое математическое ожидание.

Для этого сначала генерируется последовательность случайных величин $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Далее генерируем последовательность $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$, причем $h_0 = 0$.

Затем генерируется последовательность величин $S_n = S_{n-1} e^{h_n}$ с учетом (2), а её математическое ожидание высчитывается с помощью стандартной формулы выборочного момента (1).

На рис. 3 можно увидеть динамику индекса RTSI, вычисленную с помощью метода построения ARCH модели.

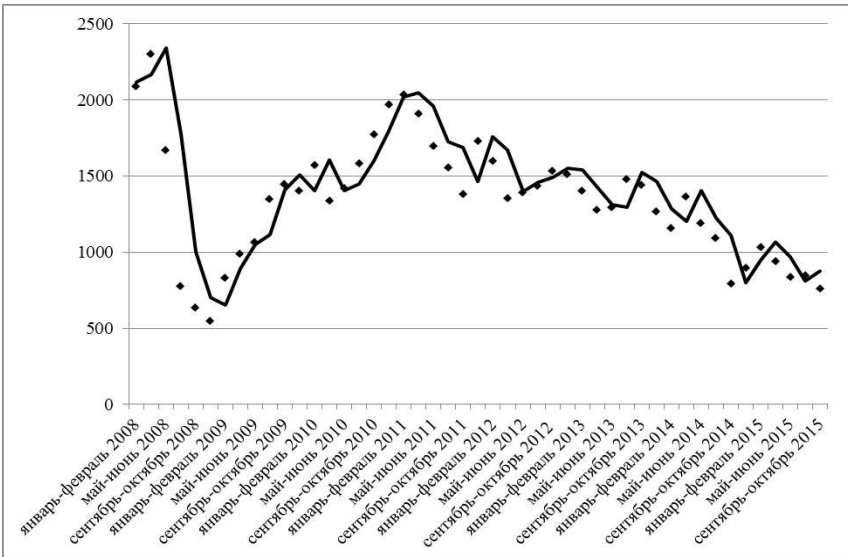


Рис. 3. Динамика оценки индекса RTSI, построенная с помощью ARCH-модели

6. СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ

Для сравнения результата используются 3 критерия. В табл. можно увидеть разницу между данными критериями.

В качестве первого критерия используется квадрат отклонения от среднего значения, посчитанного в соответствии с выбранной моделью.

$$I_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (S_k - M[S_k])^2}.$$

В качестве второго критерия используется модуль отклонения от среднего значения.

$$I_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_k - M[S_k]|$$

В качестве третьего критерия оценки качества модели используется полудлина интервала, в который с вероятностью 0,9 попадают отклонения реальных значений индекса RTSI от его прогнозных значений.

Для этого сначала вычислим значения ошибок для каждой модели.

$$e_k = x_k^{\text{реальное}} - x_k^{\text{модельное}}$$

где $x_k^{\text{точное}}$ – известное значение индекса RTSI, $x_k^{\text{модельное}}$ – прогнозное значение, рассчитанное для каждой из моделей с использованием описанных выше формул по данным за исторический двухмесячный период.

Для метода выборочного момента $x_k^{\text{модельное}}$ рассчитывается по формуле (1).

Для модели AR(1) $x_k^{\text{модельное}}$ вычисляется с использованием формул (7) – (9).

Для ARCH(1) модели $x_k^{\text{модельное}}$ вычисляется, как описано выше, при помощи генерации последовательности $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ методом Монте-Карло.

Составляем вариационный ряд:

$$|e_{(1)}| \leq \dots \leq |e_{(n)}|$$

Следовательно, значение третьего критерия будет равно

$$I_3 = |e_{(n_{0,9})}|$$

где $n_{0,9} = [0,9n] + 1$.

Таблица 1 Сравнение критериев моделирования динамики индекса RTSI

	I_1	I_2	I_3
Выборочный момент	271,5094	188,6639	342,2
AR(1)-модель	218,6188	164,1294	325,8
ARCH(1)-модель	244,005	174,943	318,8

В табл. приведем примеры рассчитанных критериев на основе данных индекса RTSI за январь 2008 -октябрь 2015.

7. ВЫВОДЫ

Результаты расчетов свидетельствуют о том, что модели AR(1) и ARCH(1) примерно одинаковы по точности и превосходят первую модель, основанную на выборочном среднем. В то же время указанные в табл. значения критериев сравнения с учетом того, что среднее значение индекса RTSI за рассматриваемый период составляет примерно 1500 пунктов, свидетельствуют о том, что рассмотренные динамические модели AR(1) и ARCH(1) имеют погрешность выше 10% при прогнозировании всего на один день вперед. Это видимо свидетельствует о том, что удовлетворительное прогнозирование финансового индекса RTSI невозможно с использованием только статистических данных о его динамике в прошлом и требует учета дополнительной информации о других макроэкономических показателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sharpe W.F.* Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk // *J. of Finance*, 1964, 19, p. 425-442.
2. *Lintner J.* The valuation of risky assets and the selection of risky investments on stock portfolios and capital budgets // *Review of Economics and Statistics*, 1965, 47, p. 13-34.
3. Кан Ю.С. Оптимизация портфеля ценных бумаг с учетом риска. - М.: МАИ-ПРИНТ, 2008.
4. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели. - М.: ФАЗИС, 1998.

Работа поступила 20.02.2019г.



НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ СНИЖЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ ДЛЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО РАЗРЕЗА СКОРОСТИ ЗВУКА В ОКЕАНЕ

В.О. Захаров

В статье приводится сравнение методов снижения размерности применительно к профилям скорости звука в морских волноводах. Приводятся методы, основанные на машинном обучении. Производится сравнение методов и выбор наиболее подходящего метода для решения данной задачи.

The article presents methods for comparing sound sizes as applied to the sound velocity profile in sea waveguides. The methods based on machine learning are given. Performs a comparison of methods and selection of the most appropriate parameters to solve this problem.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Нейронная сеть, метод главных компонент, скорость звука, разреженное моделирование.

ДЛЯ ЦИТАТЫ

В.О. Захаров. Некоторые методы снижения размерности для вертикального разреза скорости звука в океане // Моделирование и анализ данных. 2019. №2. С.48-56.

V.O. Zakharov. Some methods of reducing the dimension for a vertical cut of the speed of sound in the ocean. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis (*Russia*). 2019, no.2, pp.48-56.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для расчета скорости звука в океанической среде используется формула Вильсона [6], предложенная им в 1960 году. График (см.рис.1.1), показывающий зависимость скорости звука от глубины, будем называть вертикальным распределением скорости звука (ВРСЗ). Так как для формулы Вильсона нужно очень много информации об океанической среде, в основном используются приближенные модели, например, профиль Munka – идеализированный профиль скорости звука. Такой профиль считается как среднее значение скорости в океанической среде – 1500 м/с умноженное на гладкую функцию [6]. Этот подход имеет малое отношение к реальности, так как результат получается очень усредненным.

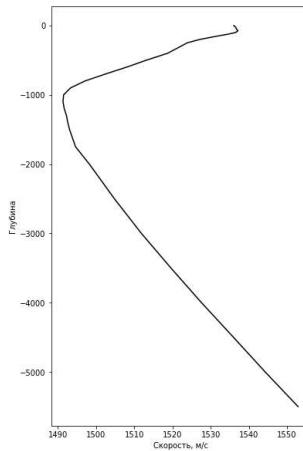


Рис.1.1 Профиль скорости звука ВРСЗ

В данной статье был предложен подход, основанный на алгоритмах машинного обучения. Похожая работа была проделана в [1]. Данная работа была дополнена методом, основанном на применении нейронных сетей.

В работе используются методы *unsupervised learning* (обучение без учителя). При таком подходе известно только описание объектов (обучающей выборки), и требуется обнаружить внутренние закономерности, зависимости между объектами. Такой подход позволяет снизить размерность за счет выделения только наиболее важной информации из данных.

Для решения данной задачи были рассмотрены следующие методы:

1. Метод главных компонент.
2. Метод *k-means* (к средних).
3. *K-SVD* (Singular value decomposition).
4. Нейронные сети.

2. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Все модели, представленные далее, были обучены на выборке из 112 профилей ВРСЗ. Все результаты были получены на тестовой выборке из 38 профилей, размерность исходного профиля - 33. Оценивается среднеквадратическая ошибка (mean square error, MSE). Результаты были получены средствами языка *python* и библиотек для машинного обучения - *scikit learn*, для обучения нейронных сетей - *Tensor Flow* (*keras api*), и специальной библиотекой для метода *k-svd* - *ksvd*.

Анализ был произведен для небольшой окрестности (широта от 10 до 32, долгота от -70 до -40) Индийского океана по данным за январь.

Метод главных компонент (*principal component analysis, PCA*)

Данный метод позволяет кодировать точки в пространстве меньшей размерности. Для каждой точки $x^i \in \mathbb{R}^n$, $i=1..N$, где N это количество элементов в выборке, требуется найти соответствующий ей кодированный вектор $c^i \in \mathbb{R}^k$. Если k меньше n , то для хранения коди-



рованных точек потребуется меньше памяти, чем для исходных. Требуется найти функцию кодирования $f(x) = c$ и функцию декодирования $x \approx g(f(x))$.

Используя метод главных компонент, задача сводится к тому, чтобы найти такое ортогональное преобразование в новую систему координат, в которой выборочная дисперсия данных вдоль первой координаты максимальна. Выборочная дисперсия вдоль второй координаты максимальна при условии ортогональности первой координате, выборочная дисперсия вдоль n -ой координаты максимальна при условии ортогональности всем остальным координатам.

Возьмем такой набор векторов X , в котором каждый вектор имеет среднее 0. Если это не так, центрирования легко добиться, вычтя среднее из всех примеров на этапе предварительной обработки.

Несмещенная выборочная ковариационная матрица, ассоциированная с X , определяется по формуле :

$$Var(x) = \frac{1}{N-1} X^T X \quad (2.1)$$

PCA находит представление (посредством линейного преобразования) $z = W^T x$, для которого $Var(z)$ диагональная матрица. Отсюда легко показать, что главные компоненты матрицы X определяются собственными векторами $X^T X$. Таким образом $X^T X = W \Lambda W^T$ [4].

Для сжатия профиля ВРСЗ до размерности k , достаточно взять первые k главных компонент и разложить по ним данный профиль.

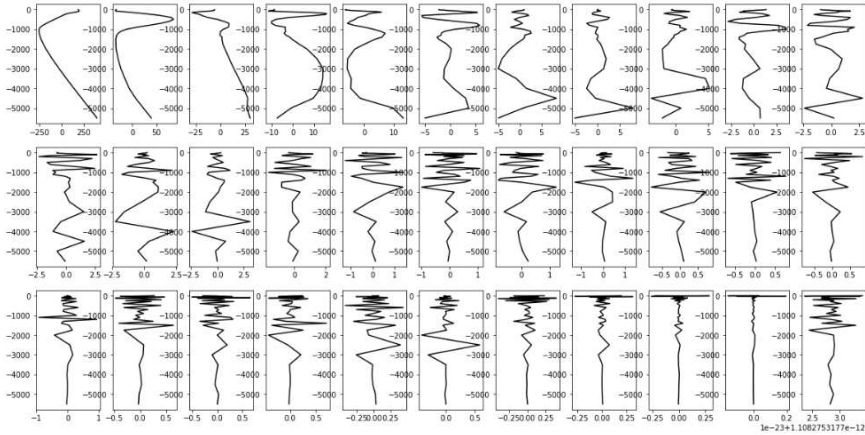


Рис.2.1 Главные компоненты профилей скорости звука

На рисунке 2.1 представлен набор главных компонент для профилей скорости звука.

На рисунке 2.2 приводится сравнение исходного вектора из тестовых данных и его аппроксимации по 1, 3 и 5 главным компонентам. В таблице 2.1 представлено среднеквадратическое отклонение исходного тестового вектора от аппроксимированного.

Таблица 2.1

Количество компонент	Среднеквадратическое отклонение
1	2,03
3	1,486
5	0,15

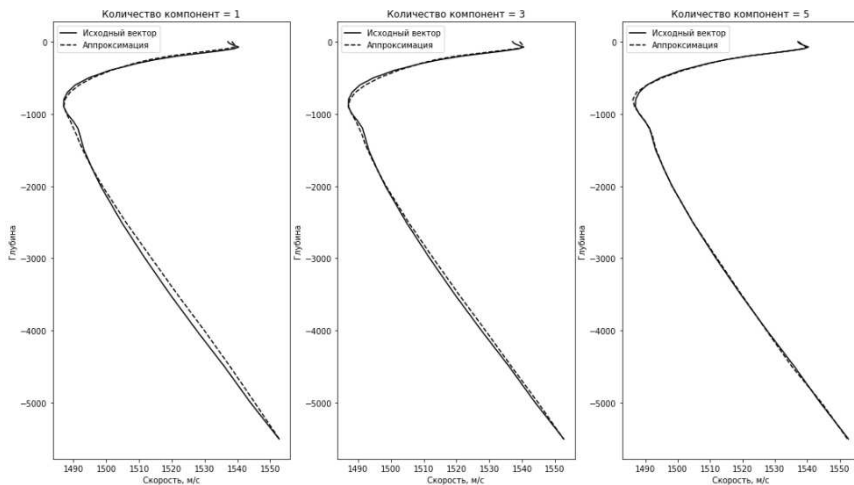


Рис.2.2. Исходный вектор ВРСЗ и его аппроксимация методом PCA

K-means

В машинном обучении метод k-means является методом кластеризации данных (присвоение каждому элементу выборки метку из конечного числа кластеров заранее неизвестных). Несмотря на это, можно провести параллели между алгоритмом k-means и PCA. Если метод PCA пытается представить данные в виде суммы главных компонент, то метод k-means напротив, пытается представить каждую точку данных в пространстве, используя центр кластера. Разбивая n -мерное пространство выборки ВРСЗ на k кластеров, каждый вектор ВРСЗ кодируется в k -мерном пространстве по принципу one-hot-encoding, то есть кодируется вектором из k элементов, в котором на i -ом месте стоит единица, а все остальные нули, где i – номер кластера к которому принадлежит данный профиль ВРСЗ.

В таблице 2.2 представлено среднеквадратическое отклонение исходного вектора из тестовых данных от вектора, являющегося центром ближайшего кластера.

Таблица 2.2

Количество кластеров	Среднеквадратическое отклонение
1	35,22
3	5,64
5	7,38
8	0,83
10	3,38

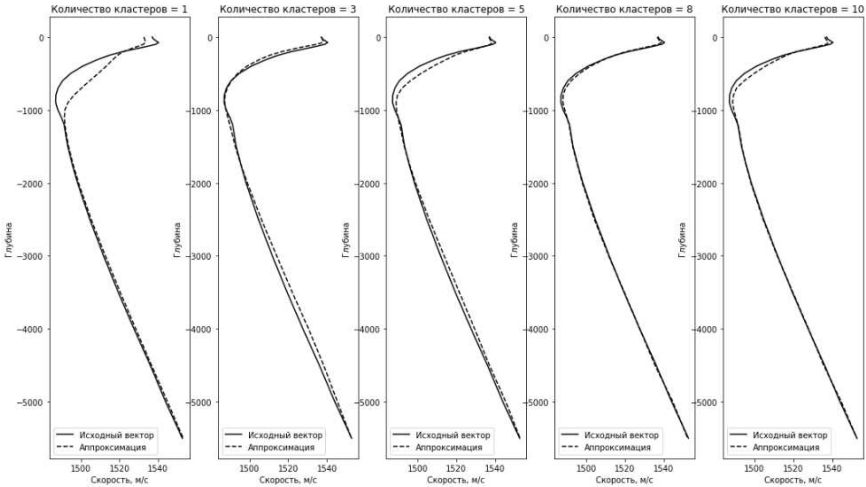


Рис.2.3. Исходный вектор ВРСЗ и его аппроксимация методом k-means

Данный метод кодирования хоть и не самый точный, но зато позволяет получить очень разреженное представления данных, что во многих задачах бывает очень практично.

K-SVD

K-SVD – еще один способ получить разреженное представления данных. Это частный случай метода под названием dictionary learning. Он позволяет эффективно находить словарь (набор базисных векторов ВРСЗ из обучающей выборки) с помощью SVD разложения и является своего рода обобщением метода k-means. В отличие от k-means, K-SVD позволяет получать кодированный вектор с заранее заданным количеством ненулевых элементов. В методе K-SVD решается следующая задача оптимизации:

$$\min_{X,D} \{ \|Y - DX\|_F^2 \}, \text{ при условии } \|x_i\|_0 \leq T_0, \text{ для } \forall i \in 1..N, \quad (2.2)$$

где

$Y \in \mathbb{R}^{n \times N}$ - обучающий набор профилей ВРСЗ, $D \in \mathbb{R}^{n \times k}$ - матрица словарь - составленная из k обучающих профилей ВРСЗ, $X \in \mathbb{R}^{k \times N}$ - кодированные профили ВРСЗ, F - норма Фробениуса (корень из суммы квадратов всех элементов матрицы), $\|\cdot\|_0$ - норма вектора (количество ненулевых элементов в векторе), T_0 - максимальное количество ненулевых элементов в кодированном векторе ВРСЗ.

Данная задача решается итеративным поиском при помощи SVD разложения, более подробный алгоритм изложен в [2]. Мы для решения воспользуемся готовой библиотекой языка python – ksvd.

K-SVD является обобщением метода k-means, так как при $T_0 = 1$, K-SVD эквивалентен методу k-means. Восстановленный вектор по методу K-SVD уже является не центром одного кластера, как это было в k-means, а линейной комбинацией нескольких таких кластеров.

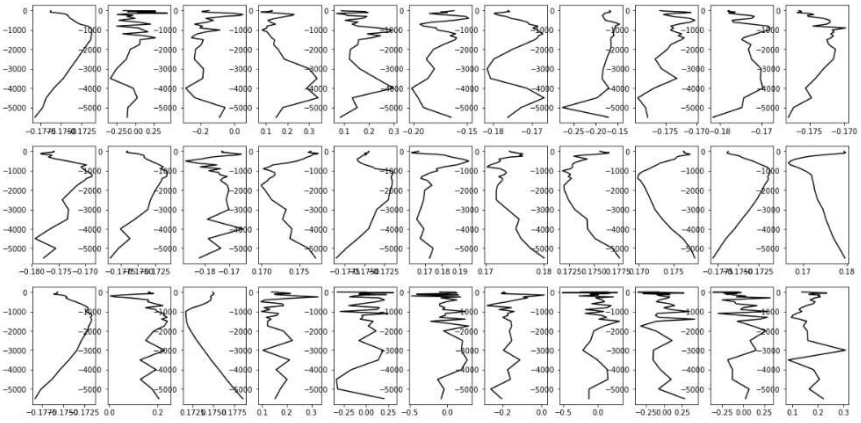


Рис.2.4. Словарь, полученный методом K-SVD

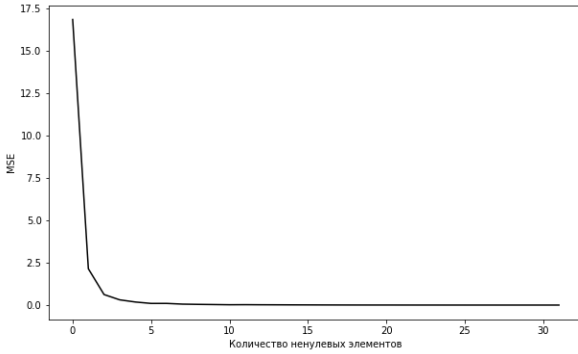


Рис.2.5. Зависимость ошибки аппроксимации от количества ненулевых элементов.

Как видно из графика кривой ошибки обучения, показанного на рисунке 2.5, точность перестает заметно увеличиваться уже при $T_0 = 5$.

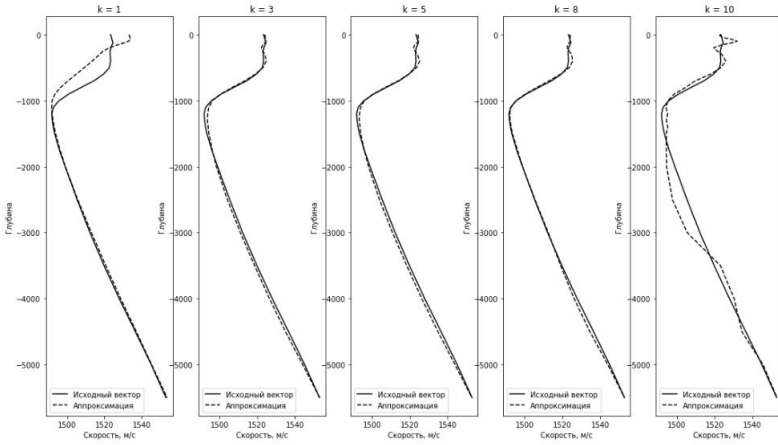


Рис.2.6. Исходный вектор ВРСЗ и его аппроксимация методом K-SVD

Таблица 2.3

К	Среднеквадратическое отклонение
1	49.7
3	1
5	1.07
8	0,82
10	10.72

Нейронные сети

Как уже говорилось ранее, в модели PCA, для сжатия размерности данных требуется найти такую функцию кодирования $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^1$ ($1 < n$) и функцию декодирования $x \approx g(f(x))$.

Теорема Цыбенко

Искусственная нейронная сеть прямой связи с одним скрытым слоем может аппроксимировать любую непрерывную функцию многих переменных с любой точностью. Условиями являются: достаточное количество нейронов скрытого слоя [3].

Данная теорема утверждает, что мы можем аппроксимировать функцию $f(x)$ и $g(c)$ с любой точностью.

Для данного типа задач существует специальная архитектура нейронной сети под названием автокодер (автокодировщик). Она состоит из двух частей: кодирование и декодирование.

На рисунке 2.7 приведена архитектура автокодировщика с одним скрытым слоем кодирования и одним скрытым слоем декодирования.

Методом обратного распространения ошибки, нейронную сеть можно обучить кодировать данные в пространстве меньшей размерности (нужно всего лишь минимизировать среднеквадратическое отклонение между исходными векторами и векторами на выходе нейронной сети). Выбирая количество нейронов на скрытом слое C , будем задавать размерность пространства, в которое перейду профили ВРСЗ.

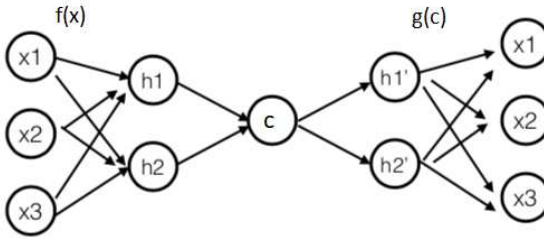


Рис.2.7 Архитектура autoencoder (автокодировщик)

После обучения нейронной сети, обрезав вторую часть, которая отвечает за декодирование данных, и оставив только часть, отвечающую за функцию кодирования $f(x)$, будем подавать на вход сети профили ВРСЗ и на выходе будем получать закодированные вектора размерности скрытого слоя C . Так как у нас остался обученный декодер $g(c)$, мы в любой момент можем восстановить (с потерей точности конечно) профили ВРСЗ прогнав их через сеть декодера.

Таблица 2.4

Размер скрытого слоя C	Среднеквадратическое отклонение
1	1.18
3	2.12
5	1.6
10	1.3

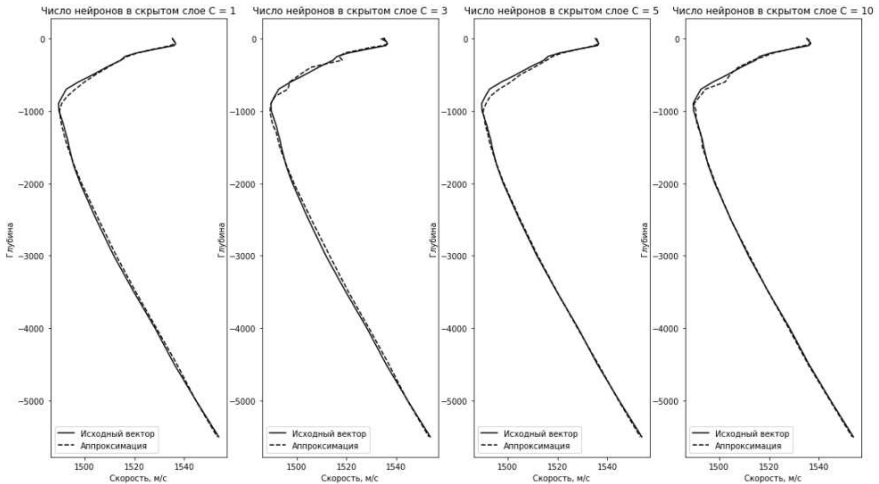


Рис.2.8. Исходный вектор ВРСЗ и его аппроксимация с использованием autoencoder.

Сеть обучалась методом обратного распространения ошибки на 150 эпохах и алгоритмом оптимизации adam.



3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравним на одном графике результаты всех четырех моделей:

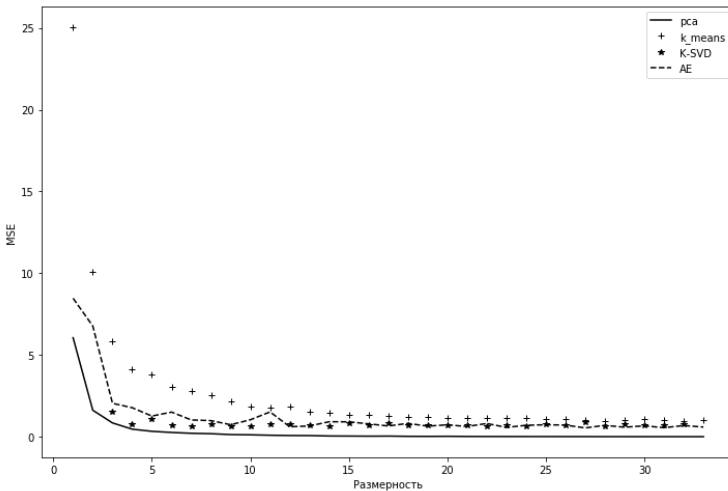


Рис3.1. Сравнение четырех моделей

Как видно из графика, метод PCA лучше всех проявил себя при решении данной задачи. Как и ожидалось, K-SVD более точнее, чем k-means, так как является его обобщением. Хотя PCA и показал более точные результаты на тестовых данных, все равно есть смысл применять метод K-SVD, за счет разреженных кодируемых данных.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит за помощь в исследовании научного руководителя проекта М.В. Лебедева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dictionary learning of sound speed profilesю. Michael Bianco, Peter Gerstoft.
2. K-SVD and its Non-Negative Variant for Dictionary Design. Michal Aharon Michael Elad Alfred M. Bruckstein. Department of Computer Science Technion—Israel Institute of Technology Technion City, Haifa 32000, Israel
3. Approximation by Superpositions of a Sigmoidal function, Mathematics of Control Signals and Systems. Cybenko, G. V.
4. Deep learning. Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, Aaron Courville.
5. Introduction to Machine Learning with Python. Andreas Müller, Sarah Guido.
6. http://oalib.hlsresearch.com/Modes/AcousticsToolbox/manual_html/node8.html

Работа поступила 20.02.2019г.

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДНЕГО В СИСТЕМАХ КОНТРОЛЯ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ

Н.Г. Горбунов, А.В. Осокин

В статье приводятся данные о проведенном исследовании на тему целесообразности использования альтернативного метода определения среднего балла в процессе электронного тестирования обучающихся. Составляется экспериментальный процесс на основе которого проверяется адекватность оценки среднего при помощи медианы вместо традиционного метода математического ожидания.

The article provides data on the study conducted on the feasibility of using an alternative method for determining the average score in the process of electronic testing of students. An experiment is conducted, on determining the adequacy of the estimation of the average score by using the median instead of the traditional average mean method.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Контрольные карты, оценка среднего, обучение, тесты.

ДЛЯ ЦИТАТЫ

Н.Г. Горбунов, А.В. Осокин. Методы определения среднего в системах контроля процесса обучения // Моделирование и анализ данных. 2019. №2. С.57-62.

N.V. Gorbunov, A.V. Osokin. Methods of determining the average in the learning process control system. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis (*Russia*). 2019, no.2, pp.57-62.

В современных электронных системах обучения выдвигаются высокие требования к качеству полученных знаний. Дистанционное обучение ввиду отсутствия личного контакта обучаемых с преподавателями не всегда позволяет оценить качество полученных знаний при обычном просмотре результатов тестирования. Вследствие вышесказанного необходимо подобрать метод оценки результатов тестирования учебных групп. В ходе данного исследования процесс обучения предполагается рассматривать как некий производственный процесс с ожидаемым уровнем качества. Одним из наиболее часто применяемых методов контроля качества на производстве являются контрольные карты Шухарта. Карта Шухарта требует данных, получаемых выборочно из процесса через примерно равные интервалы. Интервалы могут быть заданы либо по времени (например, ежечасно), либо по количеству продукции (каждая партия). Обычно каждая подгруппа состоит из однотипных единиц продукции или услуг с одними и теми же контролируемыми показателями, и все подгруппы имеют равные объемы. Для каждой подгруппы определяют одну или несколько характеристик, таких как среднее арифметическое подгруппы и размах подгруппы R или выборочное стандартное отклонение. Карта Шухарта - это график значений определенных характеристик подгрупп в

зависимости от их номеров. Она имеет центральную линию (CL), соответствующую эталонному значению характеристики. При оценке того, находится ли процесс в статистически управляемом состоянии, эталонным обычно служит среднее арифметическое рассматриваемых данных. При управлении процессом эталонным служит долговременное значение характеристики, установленное в технических условиях, или ее номинальное значение, основанное на предыдущей информации о процессе, или намеченное целевое значение характеристики продукции или услуги. Карта Шухарта имеет две статистические определяемые контрольные границы относительно центральной линии, которые называются верхней контрольной границей (UCL) и нижней контрольной границей (LCL) (рисунок 1).

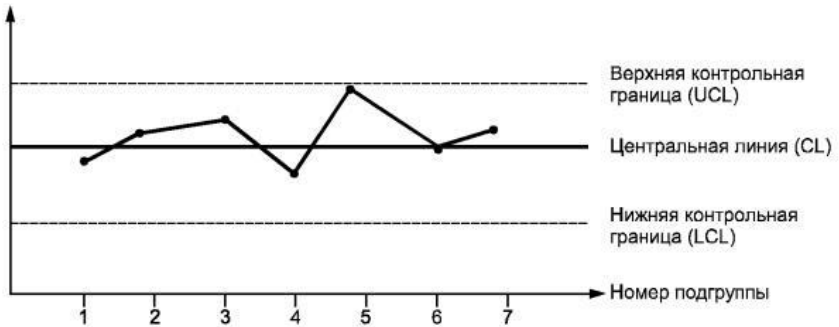


Рис. 1 Вид контрольной карты

Контрольные границы на карте Шухарта находятся на расстоянии $3s$ от центральной линии, где s - генеральное стандартное отклонение используемой статистики. Изменчивость внутри подгрупп является мерой случайных вариаций. Для получения оценки s вычисляют выборочное стандартное отклонение или умножают выборочный размах на соответствующий коэффициент. Эта мера не включает межгрупповых вариаций, а оценивает только изменчивость внутри подгрупп.

Границы $\pm 3s$ указывают, что около 99,7 % значений характеристики подгрупп попадут в эти пределы при условии, что процесс находится в статистически управляемом состоянии. Другими словами, есть риск, равный 0,3 % (или в среднем три на тысячу случаев), что нанесенная точка окажется вне контрольных границ, когда процесс стабилен. Употребляется слово «приблизительно», поскольку отклонения от исходных предположений, таких как вид распределения данных, будут влиять на значения вероятности.

Для процесса оценивания при помощи контрольных карт способом определения среднего согласно стандарту, используется математическое ожидание. В данной статье проверке подвергается гипотеза, что для частного случая контроля процесса обучения более адекватной оценкой может выступать медиана.

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины называют сумму произведений всех возможных значений этой величины на их вероятности

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i n_i$$

Медиана — число m , такое что X принимает с вероятностью $1/2$ как значения больше m , так и меньше m .

$$P(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \text{ and } P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$$

Для симуляции статистики результатов используется алгоритм генерации итогов тестирования для группы, состоящей из 30 человек. Тесты состоят из 10 вопросов, с вариантами ответа да/нет. Оценка за тест для каждого из студентов представляет собой биномиальную случайную величину с $n=10$ и $p=0.8/0.6/0.3$ (для обучающихся с хорошей/средней/плохой успеваемостью соответственно). Тестируемая ученическая группа имеет 7 учеников с хорошей успеваемостью, 16 с средней успеваемостью и 7 учеников с плохой успеваемостью.

Биномиальной случайной величиной с параметрами n и p называется дискретная случайная величина, возможными значениями которой являются частоты появления события A в n независимых испытаниях ($m=1,2,\dots,n$), а вероятность соответствующих значений определяется по формуле Бернулли

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Динамика описываемого процесса считается соответствующей требованиям стабильности учебного процесса.

Оценка среднего балла группы определяется двумя способами: математическое ожидание (традиционный метод) и медиана (экспериментальный метод). Проверка результатов тестов проводилась каждый месяц в течение 1 года. Наиболее успешным методом оценки среднего будет считаться метод, оценки которого будут наиболее показательными (так как данный процесс является стабильным т.е. количество аномалий минимально, наиболее показательным будет метод с наименьшим количеством сбоев в учебном процессе).

Данные контрольные карты были созданы на основе 8 случайных наборов данных сгенерированных по вышеописанному алгоритму. Значения обведенные кругом являются аномалиями согласно методу анализа контрольных карт Шухарта. Слева представлены контрольные карты, полученные традиционным методом, а справа контрольные карты, полученные экспериментальным методом.

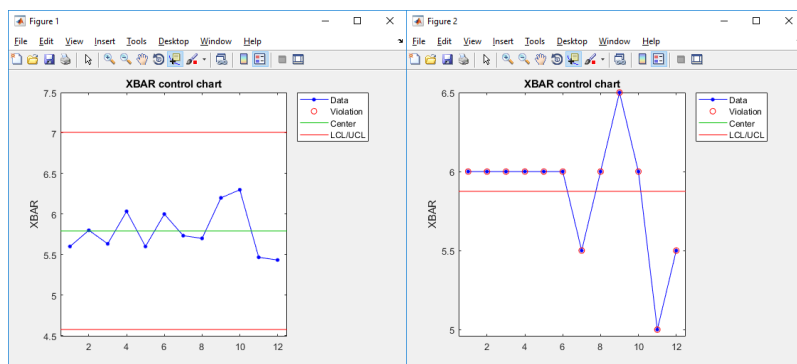
Условные обозначения:

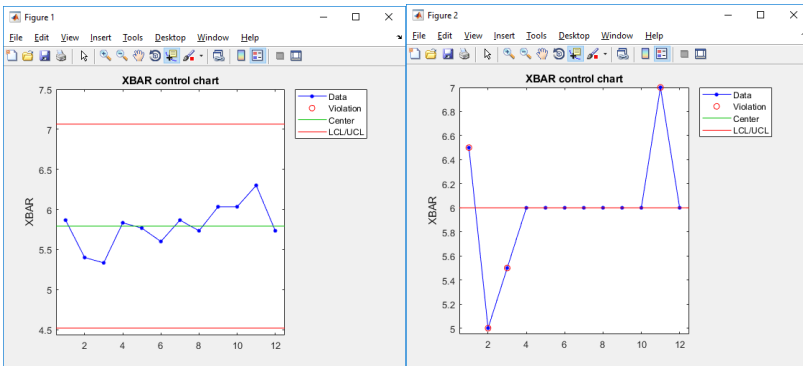
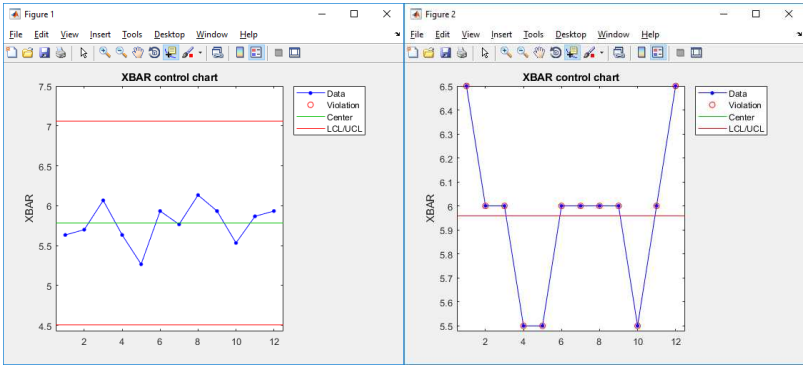
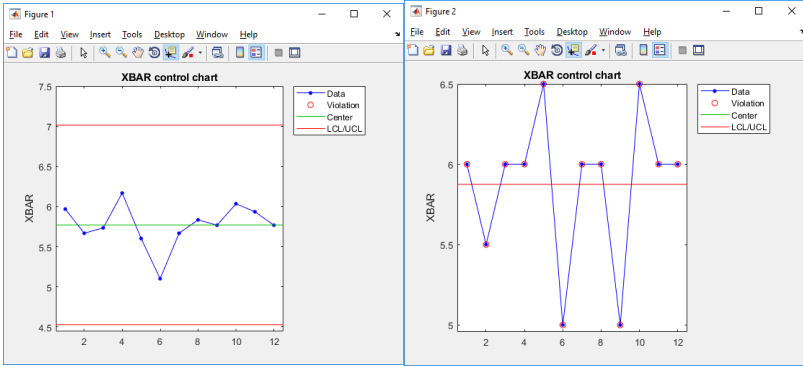
Data-экспериментальные значения

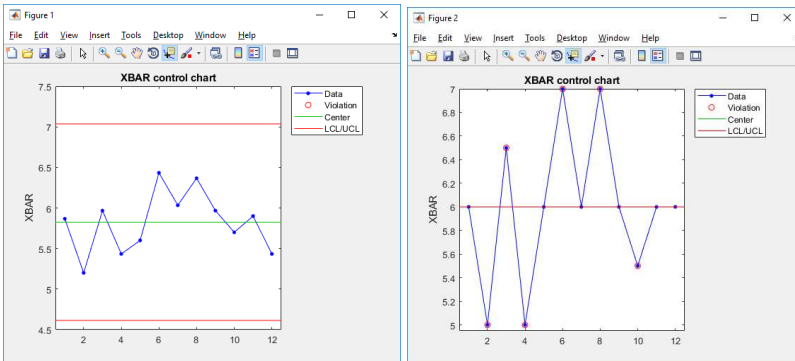
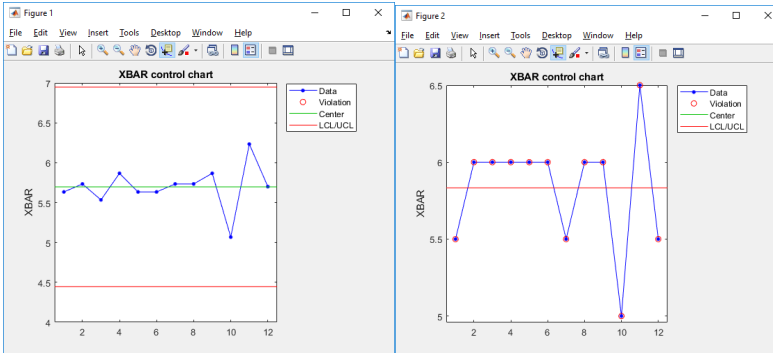
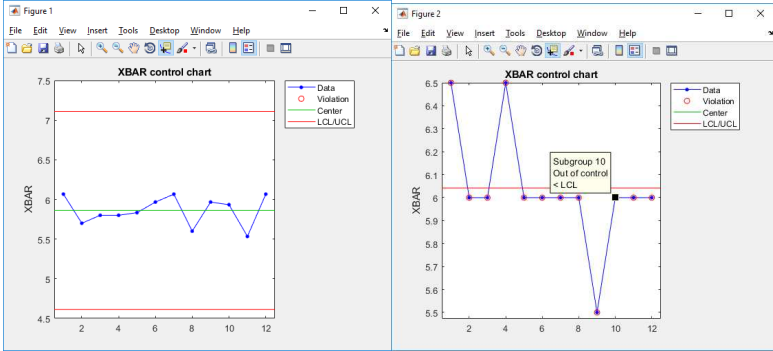
Violation-Нарушение стабильности процесса

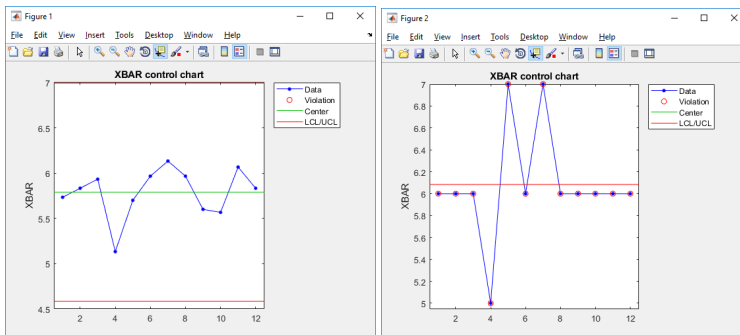
Center-Центральное значение

LCU/UCL- Нижняя контрольная граница/Верхняя контрольная граница









Как можно видеть экспериментальный метод выдает недопустимо большое количество оценок, говорящих о выходе учебного процесса из состояния стабильности. Множество одинаковых средних значений на разных участках временного отрезка приводит к неадекватности оценки. Это говорит о несоответствии данного способа определения среднего критериям качества.

Согласно полученным данным контроля учебного процесса метод оценки при помощи медианы показывает неинформативные результаты ввиду негибкости формулы определения медианы для набора дискретных значений, ведущих к интерпретации результатов тестирования как аномалий на заведомо достаточно стабильном наборе значений отвечающим стандартам качества процесса обучения. Математическое ожидание, используемое в данном исследовании как эталонное значение, не имеет данного недостатка, ввиду чего замена его медианой для данного частного случая использования контрольных карт Шухарта не является целесообразной.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Нельсон Л.С. Контрольные карты Шухарта - Тесты на особые случаи//Журнал «Технологии качества», 16, № 4, октябрь 1984, - с. 237 - 239
- 2 Шухарт У.А. Экономический контроль качества произведенного продукта // Вэн Ноустренд К., Нью-Йорк, - 1931. - 50 с.
- 3 <https://studfiles.net/preview/5593843/>
- 4 ИСО 7966-93* Приемочные контрольные карты
- 5 ГОСТ Р 50779.40-96 Статистические методы. Контрольные карты. Общее руководство и введение

Работа поступила 20.02.2019г.

ОЦЕНКА РЫНОЧНОЙ СТОИМОСТИ КВАРТИР С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

А.Б. Горобцова

В работе рассматриваются способы формирования стоимости строящейся недвижимости, влияния различных характеристик на цену квартир и построение моделей оценки стоимости.

In the paper ways of forming the value of real estate under construction, the influence of various characteristics on the price of apartments and the construction of models for valuation are considered.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Линейная регрессия, метод наименьших квадратов, оценка стоимости недвижимости.

ДЛЯ ЦИТАТЫ

А.Б. Горобцова. Оценка рыночной стоимости квартир с помощью методов регрессионного анализа // Моделирование и анализ данных. 2019. №2. С.63-72.

A.B. Gorobtsova. Assessment of the market value of apartment using regression analysis. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis (*Russia*). 2019, no.2, pp.63-72.

1. ВВЕДЕНИЕ

Оценка стоимости недвижимости является актуальной темой, так как рынок недвижимости активно развивается. В Москве около тысячи строящихся и готовых для заселения жилых комплексов. Целью работы является определение реальной стоимости жилья. Большинство публикаций об оценке посвящено рынку вторичного жилья. В данной статье изучается рынок первичного жилья города Москвы, то есть уже готовые новостройки, а также только строящиеся дома.

В ходе исследования предполагается определить характеристики, которые сильнее всего влияют на формирование стоимости недвижимости, построить модель зависимости стоимости от этих характеристик. С помощью метода наименьших квадратов найти оценки неизвестных параметров в линейной модели регрессии. На основе построенной модели провести анализ недооцененных квартир, т.е. квартир, стоимость которых значительно ниже прогнозируемого значения.

2. СБОР ДАННЫХ

Основной задачей данной работы является создание модели стоимости недвижимости. Рассмотрены квартиры в новостройках, готовых и строящихся. Полученные данные являются как количественными, так и качественными. Качественные характеристики были переформированы: при наличии признака ставится «1», при отсутствии – «0».

Таблица 1. Характеристики недвижимости.

Параметр	Описание
price	Стоимость жилья, тыс. руб.
mkad	Расстояние до МКАДа, км.
distance_to_metro	Расстояние до ближайшего метро, км.
centre_time	Расстояние от объекта недвижимости до станция метро «Охотный ряд», км.
metro_time	Время поездки от ближайшей к дому станции метро до станции «Охотный ряд», мин.
total_time	Общее время от дома и до станции «Охотный ряд», мин.
total_space	Общая площадь, кв.м.
living_space	Жилая площадь, кв.м.
kitchen_space	Площадь кухни, кв.м.
Количество комнат number_rooms	Количество комнат, шт.
bathroom	Тип санузла
ecology	Данный параметр является рейтинговым от 1 до 4, где «1» - плохая экология, «4» - очень хорошая.
year	Год сдачи
ipoteka	Возможность ипотеки.
reliability	Надежность застройщика.
shops	Наличие торговых центров.
elevator	Количество лифтов, шт.
number_flats	Количество квартир для продажи, шт.
finishing	Наличие отделки.
class	Класс недвижимости «1» - эконом, «2» - комфорт, «3» - бизнес.
tipe_house	Тип дома, где «1» - монолитный, «0» - панельный.
kindergarten	Наличие детсада
school	Наличие школы
hospital	Наличие поликлиники
balcony	Наличие балкона

В работе для сбора данных был использован сайт *cian.ru*, где для большинства характеристик, представленных в табл. 1, доступна выгрузка в формате Excel. Однако часть необходимых данных приходится выгружать вручную. В итоге была получена таблица с данными более чем трех с половиной тысяч квартир в новостройках.

После формирования такой таблицы выяснилось, что имеются пропущенные значения. Для определения пропущенных характеристик была подобрана информация из других источников, в частности на официальном сайте жилого комплекса. При невозможности получения данных из других источников в случае количественных характеристик значения можно заменить средним, если же характеристика качественна, то данное наблюдение исключается из анализа. Для анализа стоимости квартир в работе построены модели линейной регрессии с помощью метода наименьших квадратов. Задача заключается в нахождении коэффициентов линейной зависимости, при которых функция потерь принимает наименьшее значение, т.е. при данных коэффициентах сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от найденной прямой будет наименьшей. Более подробно изучить линейную регрессию и метод наименьших квадратов можно в специальной литературе [1, 2].

3. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Целью большинства работ, связанных с моделями стоимости недвижимости, является выявление основных факторов формирования цены, таких работ существует немало [3–6]. Помимо параметров, представленных в таблице 1, в работах встречается: степень износа инфраструктуры, доля благоустройства территории, доля промышленных объектов в общей площади территории, доля озеленения территории общего пользования, количество развлекательных элементов и т.д. Но такие характеристики требуют более подробного изучения и их выяснение – трудоемкий процесс. Некоторые характеристики при анализе нашей выборки квартир можно исключить, так как они являются одинаковыми для всех квартир. Такими характеристиками оказались «наличие школы», «наличие детсада» «наличие поликлиники» «наличие торговых центров», «возможность ипотеки».

Влияния наличия школ на формирование цен на жилье были проведены исследования, в том числе, о взаимосвязи стоимости квартир и характеристики близлежащих школ. В работе [7] было рассмотрено вторичное жилье в городе Перми. Для выявления зависимости были проанализированы результаты ЕГЭ. Они показали, что при улучшении балла ЕГЭ на одно стандартное отклонение увеличивается стоимость квартиры на 30 тысяч рублей, а также в работе выявлена отрицательная зависимость между ценой квартиры и уровнем преступности среди учеников. Покупатели, приобретающие жилье с большим количеством комнат, готовы доплатить за школу с более высокими показателями, так как обычно большая квартира покупается при наличии детей.

Также важно учитывать такую переменную как «экология», так как она может существенно влиять на цену квартиры. В работе [8] сделан акцент при оценке стоимости квартир в городе Москве на экологические факторы, а именно влияния на стоимость содержание в воздухе оксида углерода, оксида азота и двуокиси азота. При использовании линейной модели регрессии наблюдается зависимость: чем меньше концентрация угарного газа и больше расстояние до промышленного предприятия, тем выше цена квартиры. В работе показано, что диоксид азота и оксид азота не оказывают существенное влияние на формирование стоимости квартиры, а расстояние до ближайшего промышленного предприятия и концентрация угарного газа значимо связаны с ценой недвижимости в городе Москве. В таблице 1 экология рассматривается как рейтинговая переменная. «1» — плохая экология, «4» — очень хорошая. Данные были взяты с сайта [9], где указаны различные характеристики округов, а также дана общая оценка по многим показателям каждого района.

В работе [10] рассмотрена модель ценообразования методом географически взвешенной регрессии в городе Саратове на рынке вторичного жилья. Были изучены несколько различных пространственных эконометрических моделей с постоянными и переменными коэффициентами. Для изначальных данных были добавлены также координаты объектов. Эмпирическим методом выявилась зависимость от расположения цены за квадратный метр. Чем ближе к центру — тем дороже. Также было выяснено, что в центре дополнительный метр кухни стоит дороже, чем метр жилой площади, в отличие от окраин, где эти цены примерно равны.

Существуют работы анализирующие влияние транспортной доступности на цену жилья, как в России, так и за рубежом. Было выявлено, что данный показатель играет важную роль при оценке стоимости квартир. В работе [6] сделан акцент не только на близость остановок рядом с домом, но и на число маршрутов. Кроме того в работе [6] отмечено, что существенное влияние на формирование стоимости квартиры оказывает расположение квартиры на первом этаже. Построенная модель показала, что при увеличении площади квартиры на 1 м^2 цена повышается на 1,5%. Показано, что расстояние до остановки не является суще-

ственным фактором при оценке стоимости, а вот появление каждого нового маршрута общественного транспорта приводит к увеличению цены. Также на ее формирование влияют время, за которое можно добраться до центра города, уровень загрязненности воздуха, наличие дошкольных образовательных учреждений и торговых центров.

4. АНАЛИЗ ДАННЫХ

На рис. 1 представлено распределение цены в зависимости от количества комнат, по графику можно заметить, что разброс цен достаточно большой, особенно у трехкомнатных квартир.

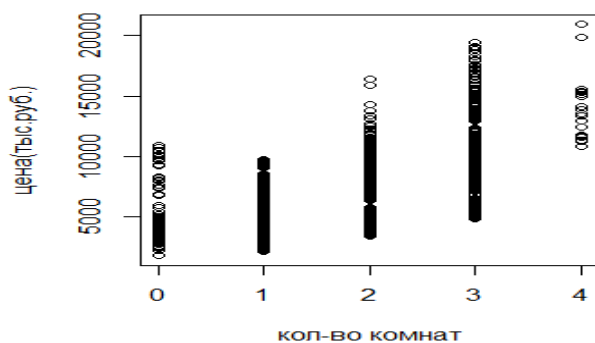


Рис. 1

На рис. 2 можно увидеть, что на рынке в основном представлены квартиры стоимостью от 4 до 10 миллионов руб.

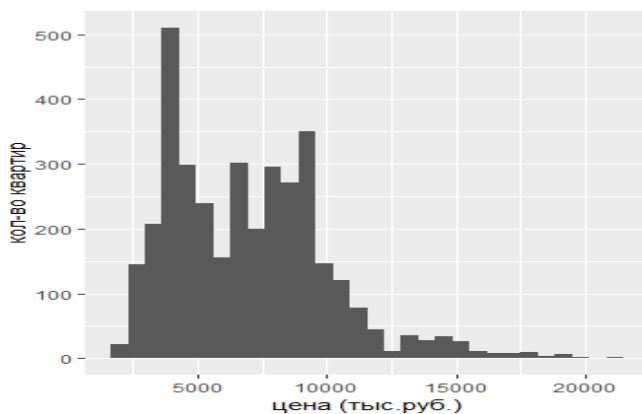


Рис. 2

Расчеты в работе проведены в программной среде R. R — язык программирования и среда для статистической обработки данных и работы с графикой. R широко используется как статистическое программное обеспечение для анализа данных и в последнее время стал стандартом для статистических программ.

Корреляционный анализ показал, что часть характеристик является сильно зависимыми, в особенности жилая и общая площади квартиры. Это вполне ожидаемо, поэтому было принято решение при построении регрессии оставить только общую площадь. Площадь кухни слабо связана с другими площадями, что не удивительно: сейчас существует очень много планировок, зачастую они индивидуальны, также довольно распространенное явление – студии, где отдельное пространство для кухни и вовсе не предусмотрено.

Таблица 2. Корреляционный анализ величин площадей

	total_space	living_space	kitchen_space
total_space	1,0	0,7578	0,4004
living_space	0,7578	1,0	0,0803
kitchen_space	0,4004	0,0803	1,0

Аналогичный анализ для характеристик расстояния и времени позволили исключить из рассмотрения все переменные кроме «время на метро» и «общее время».

Далее модель стоимости квартиры строится отдельно по числу комнат, так как каждая квартира относительно этого параметра будет иметь свои особенности. Первыми были рассмотрены однокомнатные квартиры. Однокомнатные квартиры преимущественно продаются с отделкой и совмещенным санузлом в монолитных домах комфорт-класса. В таблице 3 представлены описательные статистики количественных переменных: выборочное среднее, среднее квадратическое отклонение, максимальное и минимальное значение, медиана.

Таблица 3. Описательные статистики.

пар-п./хар-ка	mean	sd	median	min	max
metro_time	28,36	3,98	30	20	39
total_time	63,22	24,74	66	25	96
total_space	36,61	4,44	36,6	18	54,93
kitchen_space	12,94	3,9	12,5	2,1	22,4
floor	9,62	6,65	9	1	37
floors	16,91	7,64	17	5	39
class	1,77	0,66	2	1	3
ecology	1,66	0,65	2	1	3
number_flats	460,58	260,72	247	6	1166
price	5160,2	1857,8	4551	2126	9747
year	2019,5	1,11	2020	2018	2022
elevator	2,03	0,56	2	1	6

Рассмотрим линейную модель регрессии:

$$\begin{aligned} price_i = & k_0 + k_1 * metro_time_i + k_2 * total_time_i + k_3 * total_space_i + k_4 * \\ & kitchen_space_i + k_5 * floor_i + k_6 * floors_i + k_7 * tipe_house_i + k_8 * \\ & finishing_i + k_9 * class_i + k_{10} * reability_i + k_{11} * ecology_i + k_{12} * \\ & number_flats_i + k_{13} * balcony_i + k_{14} * batchroom_i + k_{15} * year_i + k_{16} * \\ & elevator_i + \varepsilon_i \\ & i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

где N – число квартир, ε_i — независимые и одинаково распределённые случайные величины.

С помощью метода наименьших квадратов были найдены оценки неизвестных параметров k_0, \dots, k_{16} , которые представлены во втором столбце таблицы 4. В третьем столбце представлены средние квадратические отклонения соответствующих оценок. В четвертом столбце приведено p-value для критерия Фишера [7] при проверке гипотезы $H_0: k_j = 0$, $j = 1, \dots, 16$. Если значение p-value больше или равно заданного уровня значимости, то эта нулевая гипотеза принимается, иначе – отвергается. Система R предлагает удобный визуальный способ отображения данных: в последнем столбце отмечены те оценки, для которых гипотеза отвергается на уровне значимости 0.01 (***) , 0.05 (**) и 0.1 (*). Пустая ячейка говорит о том, что гипотеза принимается для всех трёх уровней значимости и соответствующую характеристику возможно следует исключить из модели.

Таблица 4. Результаты оценивания параметров модели 1

	Estimate	Std. error	Pr(> t)	
(Intercept)	-2,44E+05	67850	0,000343	***
metro_time	1,24E+02	54,6	0,023326	*
total_time	-3,64E+01	11,89	0,002269	**
total_space	1,13E+02	5,9	<2e-16	***
kitchen_space	1,11E+01	7,891	0,159392	
floor	3,01E+01	2,988	<2e-16	***
floors	1,50E+01	3,237	4,24E-06	***
tipe_house	-2,08E+02	341,8	1,51E-09	***
finishing	-5,29E+02	455,3	0,245828	
class	2,15E+03	3,46E-02	7,15E-10	***
reliability	-2,84E+02	2226	0,898389	
ecology	-2,39E+00	528,6	0,9964	
number_flats	-5,35E-01	2,717	0,843887	
balcony	5,32E+01	64,88	0,412299	

bathroom	-8,40E+01	116,5	0,471277	
year	1,22E+02	33,32	0,000273	***
elevator	-3,54E+02	47,37	1,60E-13	***
AIC	18475,5		Adjusted R-squared	0.9179

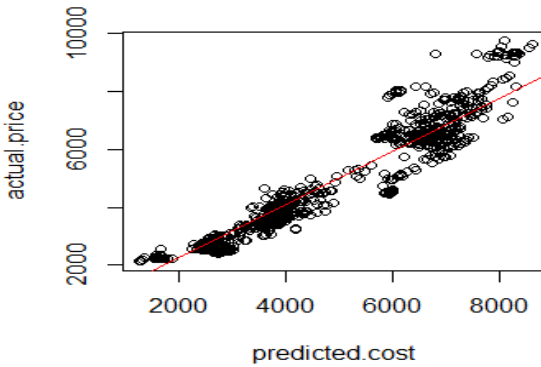
Скорректированный коэффициент детерминации $R^2 = 0,9179$ (чем ближе R^2 к 1, тем лучше построенная нами модель) оказался высоким. Также было вычислено значение информационного критерия Акаике (AIC) [11], который используется при выборе одной из нескольких моделей регрессии. Меньшее значение этого критерия говорит о том, что данная модель лучше других.

После исключения статистически незначимых характеристик была построена новая модель регрессии с меньшим количеством переменных. Исключение переменных проводилось по одному и в зависимости от поведения скорректированного коэффициента детерминации были приняты решения о том, исключать переменную или нет. В итоге была получена следующая модель.

Таблица 5. Результаты оценивания параметров модели 2

	Estimate	Std. error	Pr(> t)	
(Intercept)	-2,37E+05	6,52E+04	0,000282	***
metro_time	7,89E+01	1,11E+01	1,80E-12	***
total_time	-2,60E+01	1,31E+00	<2e-16	***
total_space	1,19E+02	4,13E+00	<2e-16	***
floor	3,06E+01	2,96E+00	<2e-16	***
floors	1,48E+01	3,08E+00	1,82E+06	***
type_house	-1,98E+03	8,43E+01	<2e-16	***
class	1,18E+03	7,97E+02	<2e-16	***
reliability	-1,92E+03	1,92E+01	<2e-16	***
ecology	-4,24E+02	5,20E+01	8,08E-16	***
number_flats	-2,64E+00	1,52E-01	<2e-16	**
year	1,19E+02	3,23E+01	0,00023	***
elevator	-3,41E+02	3,47E+01	<2e-16	***
AIC	18469,8		Adjusted R-squared	0,9179

В новой модели коэффициент детерминации не изменился, а критерий Акаике оказался меньше, что указывает на то, что выбор нужно сделать в пользу второй модели, тем более что в ней меньше регрессоров, что делает данную модель проще для анализа. По модели 2 определены прогнозные цены и получен следующий график, изображенный на рис. 3.


Рис.3

Квартиры, которые находятся выше линии регрессии, переоценены, то есть предсказанная цена оказалась ниже рыночной, квартиры под линией регрессии соответственно недооценены. Для покупателей наибольший интерес представляют вторые. В таблице 6 приведены квартиры, предсказанные цены которых наиболее значительно отличаются от рыночной цены (отношение предсказанной и рыночной цен).

Таблица 6. Недооцененные квартиры для модели 2

Номер наблюдения	786	777	789	787	795
Отношение цен	1,338	1,337	1,335	1,327	1,322

Так, квартира 786 недооценена более чем на 33%. Такая разница между ценами может возникать по разным причинам, как под воздействием человеческого фактора, то есть ошибки или продавец может быть заинтересован в быстрой продаже квартиры, так и от того, что есть еще какие-то характеристики, которые не учтены в данной модели, но влияют на цену этой квартиры. Для выяснения причин такой разницы в ценах требуется более подробно изучать описание квартиры, отзывы, посмотреть квартиру и т.п.

Была также рассмотрена модель 3, где были взяты логарифмы от цен на квартиру, что достаточно часто позволяет построить более точную модель линейной регрессии при анализе цен на недвижимость.

Таблица 7. Результаты оценивания параметров модели 3

	Estimate	Std. error	Pr(> t)	
(Intercept)	2,77E+01	1,00E+01	0,00601	**
metro_time	9,56E-03	1,75E-03	5,88E-08	***
total_time	-6,49E-03	2,53E-04	<2e-16	***
total_space	2,52E-02	6,39E-04	<2e-16	***
floor	4,19E-03	4,59E-04	<2e-16	***
floors	4,43E-03	4,75E-04	<2e-16	***
tipe_house	-3,84E-01	1,31E-02	<2e-16	***

class	1,91E-01	2,24E-02	<2e-16	***
reliability	-4,83E-01	2,95E-02	<2e-16	***
ecology	-7,50E-02	8,16E-03	<2e-16	***
number_flats	-5,71E-04	2,39E-05	<2e-16	***
balcony	2,11E-02	9,90E-03	0,0331	*
year	-9,46E-03	4,97E-03	0,05735	
elevator	-7,63E-02	5,36E-03	<2e-16	***
AIC	-2508		Adjusted R-squared	0,9524

Скорректированный коэффициент детерминации в этом случае был выше, чем в предыдущих двух моделях. Данная модель похожа на вторую, только здесь можно исключить еще и характеристику «наличие балкона».

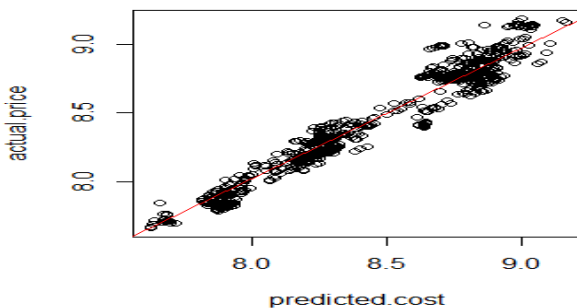


Рис. 4

График получился похожим на тот, который был построен по второй модели.

Таблица 8. Недооцененные квартиры для модели 3

Номер наблюдения	786	777	789	787	795
Отношение цен	1,271	1,270	1,268	1,254	1,254

Видно, что номера самых недооцененных квартир остались теми же, что и для модели 2.

Аналогично были исследованы двухкомнатные и трехкомнатные квартиры; модели оказались схожими и результаты недооцененности этих квартир тоже доходили до 30%.

Однако для четырехкомнатных квартир ситуация оказалась иной. Недооцененных четырехкомнатных квартир практически нет. Конечная модель стоимости четырехкомнатных квартир выглядит следующим образом:

$$price = k_0 + k_1 * metro_time + k_2 * total_time + k_3 * total_space + k_4 * kitchen_space + k_5 * floor + k_6 * floors + k_7 * tipe_house$$

Цены, предсказанная и рыночная, почти совпадают: самая большая разница — 3%. Отдельно были рассмотрены квартиры-студии, так как отдельного пространства для кухни в них не

предусмотрено, соответственно переменная «площадь кухни» равна нулю, но результаты оказались схожими с однокомнатными квартирами.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы были рассмотрены более трех тысяч квартир-новостроек в Москве и Подмосковье. В зависимости от количества комнат были построены линейные модели регрессии. Выяснилось, что среди всех выборок, кроме четырехкомнатных квартир, имеются сильно переоцененные и недооцененные квартиры. Отличие рыночной цены от предсказанной может доходить до 30%. При построении моделей исключить большое количество показателей не удалось, модели все равно имеют достаточное большое число регрессоров, это говорит о том, что, вероятно, каждый из этих регрессоров оказывает существенно влияние на формирование цены.

Предложенные модели позволяют выделить из общей масс квартир наиболее интересные кандидаты для более подробного рассмотрения. Например, определить для себя наиболее важные параметры, а потом, относительно них, рассматривать недооцененные квартиры. Данный метод также может быть использован при оценке стоимости недвижимости, например, когда покупатель брал ипотечный кредит, после получения акта приема-передачи объекта недвижимости. Со стороны продавца могут быть рассмотрены переоцененные квартиры, на которые следует обратить внимание в случае, если на них нет покупательского спроса.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980.
- 2 Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика, 1981.
- 3 Вязова Г.А., Попелюк В.С. Прогнозирование стоимости двухкомнатной квартиры на вторичном рынке недвижимости в г. Хабаровска с использованием модели множественной регрессии // Молодой ученый. 2011. №25. С. 87–88.
- 4 Хлюпина М.А., Исаев А.Г. Моделирование зависимости и анализ цен на квартиры от ряда факторов на примере города Елабуга // Фундаментальные исследования. 2011. №5. С. 213–217.
- 5 Березина А. В. Эконометрическая модель стоимости вторичного жилья на примере г. Челябинска // Современные научные исследования и инновации. 2015. №7.
- 6 Сидоровых А.С. Оценка влияния транспортной доступности на цены недвижимости // Прикладная эконометрика. 2015. №37. С. 43–56.
- 7 Ожегов Е.М., Косолапов Н.А., Позолотина Ю.А. О взаимосвязи между стоимостью жилья и характеристиками близлежащих школ // Прикладная эконометрика. 2017. №47. С. 28–48.
- 8 Катышев П.К., Хакимова Ю.А. Экологические факторы и ценообразование на рынке недвижимости (на примере г. Москвы) // Прикладная эконометрика. 2012. №28. С. 113–123.
- 9 https://www.novostroy-m.ru/analitika/ekologicheskii_reyting_rayonov_moskvy
- 10 Балаш В.А., Балаш О.С., Харламов А.В. Экономический анализ геокодированных данных о ценах на жилую недвижимость // Прикладная эконометрика. 2011. №22. С. 62–77.
- 11 Akaike, H. A new look at the statistical model identification. IEEE Transactions on Automatic Control. 1974. P. 716–723 .

Работа поступила 20.02.2019г.

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 004.942

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ВЕРОЯТНОСТНЫМ КРИТЕРИЕМ

А.Н. Тарасов, В.М. Азанов

Рассматривается численный алгоритм для поиска субоптимального управления для систем, заданных разностными уравнениями. С использованием численного метода удастся найти изобеллы уровня 1 и 0, нахождение которых позволяет найти субоптимальное управление, не решая систему, в которой присутствует функция Беллмана, вычисление которой затруднительно. С использованием описанной численной процедуры решается пример, полученный результат сравнивается с аналитически найденным оптимальным управлением.

Numerical algorithm for finding a suboptimal control for systems defined by difference equations is being considered. The usage of numerical method makes it possible to find level 1 and 0 isobelles, the finding of which allows to discover a suboptimal control without solving the system where the Bellman function is presented, the calculation of which is complicated. The example is resolved using the described numerical procedure. The result obtained is compared with the analytically found optimal control.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Стохастическое оптимальное управление, вероятностный критерий, численные методы, Монте-Карло, дискретные системы, метод динамического программирования.

ДЛЯ ЦИТАТЫ

А.Н. Тарасов, В.М. Азанов. Численный алгоритм поиска субоптимального управления дискретной стохастической системой с вероятностным критерием // Моделирование и анализ данных. 2019. №2. С.73-82.

A.N. Tarasov, V.M. Azanov. Numerical algorithm for finding a suboptimal control of a discrete stochastic system with a probability criterion. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis (*Russia*). 2019, no.2, pp.73-82.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимального управления по вероятностным критериям качества составляют предмет изучения специального раздела теории стохастического оптимального управления. Основным алгоритмом решения данного типа задач является метод динамического программирования (МДП). Использование данного метода сопряжено с сложностью получения аналитического решения. Это подтверждается тем, что для достаточно простых систем получаемые решения имеют сложную структуру и их вычисление затруднительно, например, в работах [1, 2].

В данной статье предложен численный алгоритм для поиска субоптимального управления для задач с вероятностным точностным функционалом, который позволяет получать решение без вычисления функции Беллмана.

2. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть динамика объекта управления описывается разностным уравнением

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, \xi_k), \quad k = \overline{0, N}, \quad (1)$$

где

- $x_k \in \mathbb{R}^n$ - вектор состояния, $x_0 = X_0$ - начальное состояние предполагается случайным с известным распределением P_{x_0} ;
- $u_k \in U_k \subset \mathbb{R}^m$ - вектор управления;
- ξ_k - случайный вектор с известным распределением P_k , с носителем распределения $\Xi_k = \{\zeta \in \mathbb{R}^s: b_{k1}^i \leq \zeta^i \leq b_{k2}^i, i = \overline{1, s}\}$;
- $f_k: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$ - непрерывная для всех $k = \overline{0, N}$ функция;
- $\xi^k = (\xi_0, \dots, \xi_k)^T$, пусть ξ^N не зависит от X , а ξ_{k+1}^k не зависит от ξ^k ;
- U_k - множество борелевских функций, для которых выполняется $u_k(x_k) \in U_k$;
- N – конечный момент времени, называемый горизонтом управления.

На траекториях системы (1) определим функционал вероятности

$$P_\varphi(u(\cdot)) = P(\Phi(x_{N+1}(u(\cdot), \zeta)) \leq \varphi), \quad (2)$$

где P - вероятностное распределение случайного вектора $\zeta = (X^T, \xi_0^T, \dots, \xi_N^T)^T$, $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ - ограниченная снизу непрерывная функция, $\varphi \in \mathbb{R}$ - заданное значение.

Хотелось бы обратить внимание на то, что в аэрокосмической практике одним из важнейших требований, предъявляемых к проектируемой системе управления, оказывается неравенство

$$P_\varphi(u(\cdot)) \geq \alpha,$$

где $\alpha \in [0, 1]$ - минимально допустимая вероятность выполнения цели управления. Физически α характеризует надежность модели, а это неравенство трактуется следующим образом: заданная точность φ системы управления гарантирована с вероятностью α . Это послужило мотивацией для исследования задачи

$$P_\varphi(u(\cdot)) \rightarrow \max_{u(\cdot) \in U}, \quad (3)$$

где $U = U_0 \times \dots \times U_N$, алгоритму решения которой посвящена данная статья.

Достаточно продолжительное время было известно небольшое количество качественных результатов, касающихся задачи (3). Численный метод, предлагаемый в [9,10], ограничивает общность классов систем управления, случайных возмущений, управляющих функций и точностных функционалов.

В работе [8] было установлено, что если существует стратегия $u^\varphi(\cdot) \in U$, удовлетворяющая следующим рекуррентным соотношением динамического программирования, то она оптимальна в задаче (3)

$$\begin{aligned}
 u_k^\varphi(x_k) &= \arg \max_{u_k \in U_k} M_k [B_{k+1}^\varphi(f_k(x_k, u_k, \xi_k)) | x_k], \\
 B_k^\varphi(x) &= \max_{u \in U_k} M_k [B_{k+1}^\varphi(f_k(x_k, u_k, \xi_k)) | x_k = x], \quad k = \overline{0, N} \\
 B_{N+1}^\varphi(x) &= I_{(-\infty, \varphi]}(\Phi(x)),
 \end{aligned} \tag{4}$$

где M_k - оператор математического ожидания по распределению P_k , $I_A(x)$ - индикаторная функция множества A , $B_k^\varphi(x)$ - функция Беллмана

$$B_k^\varphi(x) = \sup_{u_k(\cdot) \in \bar{U}_k, \dots, u_N(\cdot) \in \bar{U}_N} P(\Phi(x_{N+1}(x_k, u_k(\cdot), \dots, u_N(\cdot), \xi_k, \dots, \xi_N)) | x_k = x).$$

Важным для дальнейшего является свойство ограниченности функции Беллмана $B_k^\varphi(x) \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{R}^n, k = \overline{0, N}$, вытекающие из определения вероятности. Для более компактной записи вместо $M_k [B_{k+1}^\varphi(f_k(x_k, u_k, \xi_k)) | x_k = x]$ будем использовать $M_k [B_{k+1}^\varphi(f_k(x, u_k, \xi_k))]$.

В работе [7] сформулированы достаточные условия существования решения в задаче (3). В публикациях [4,5] с использованием поверхностей 1 и 0 уровней Беллмана и модифицированными выражениями для МДП удалось найти аналитические решения для некоторого набора аэрокосмических задач. Также удалось доказать теорему, которая позволяет найти субоптимальное управление без необходимости разрешения системы, содержащей функцию Беллмана.

Задача нахождения оптимальной марковской стратегии в стратегии в соответствии с предложенными выше условиями [8] сопряжена с трудностями вычисления функции Беллмана на каждом шаге МДП. Указанная проблема в первую очередь порождена необходимостью вычисления кратных интегралов в пространстве размерностей n и s .

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗОБЕЛЛ И ТЕОРЕМА О ДВУХСТОРОННЕЙ ОЦЕНКЕ ФУНКЦИИ БЕЛЛМАНА

Главной идеей, предложенной в [4], является анализ уравнения Беллмана в различных областях пространства состояний, а именно в таких, в которых функция Беллмана равна единице, нулю и, соответственно, не равна единицы, ни нулю. Первые две области, а точнее множества, названы в [4] изобеллами уровня 1 и 0. Они определяются следующими соотношениями:

$$I_\kappa^\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n: B_\kappa^\varphi(x) = 1\}, \quad O_\kappa^\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n: B_\kappa^\varphi(x) = 0\}, \quad k = \overline{0, N}.$$

Рассмотрим также множество, где функции Беллмана не равна ни 1, ни 0:

$$B_\kappa^\varphi = \mathbb{R}^n \setminus \{I_\kappa^\varphi \cup O_\kappa^\varphi\}.$$

Заметим, что из определения множеств следует, что $B_\kappa^\varphi \cup I_\kappa^\varphi \cup O_\kappa^\varphi = \mathbb{R}^n$ и

$$\begin{cases}
 B_k^\varphi(x) = 1, & x \in I_k^\varphi, \\
 B_k^\varphi(x) \in (0, 1), & x \in B_k^\varphi, \\
 B_k^\varphi(x) = 0, & x \in O_k^\varphi.
 \end{cases}$$

В [4,5] доказаны основные утверждения о том, как могут быть записаны изобеллы уровня 1 и 0, а также нижняя и верхняя оценка значения функции Беллмана для $x \in B_k^\varphi, k = \overline{0, N}$.

Лемма 1. Справедливы следующие утверждения:

1. Множество I_k^φ удовлетворяет рекуррентным соотношениям в обратном времени $k = \overline{0, N}$:

$$I_k^\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n: \exists u_k \in U_k: P(f_k(x, u_k, \xi_k) \in I_{k+1}^\varphi) = 1\}, \quad k = \overline{0, N}$$

$$I_{N+1}^\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n: \Phi(x) \leq \varphi\}.$$

2. Множество O_k^φ удовлетворяет рекуррентным соотношениям в обратном времени $k = \overline{0, N}$:

$$O_k^\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n: \forall u_k \in U_k: P(f_k(x, u_k, \xi_k) \in O_{k+1}^\varphi) = 1\}, \quad k = \overline{0, N}$$

$$O_{N+1}^\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n: \Phi(x) > \varphi\};$$

3. Для $x_k \in I_k^\varphi$ оптимальным управлением на шаге k является любой элемент из множества $U_k^1(x_k)$:

$$U_k^1(x_k) = \{u \in U_k : P(f_k(x_k, u, \xi_k) \in I_{k+1}^\varphi) = 1\}, \quad k = \overline{0, N};$$

4. Для $x_k \in O_k^\varphi$ оптимальным управлением на шаге k является любой элемент из множества U_k ;

5. Уравнение Беллмана в области $x \in B_k^\varphi$ допускает представление

$$B_k^\varphi(x) = \max_{u_k \in U_k} \{P(f_k(x, u_k, \xi_k) \in I_{k+1}^\varphi) + P(f_k(x, u_k, \xi_k) \in B_{k+1}^\varphi) \times$$

$$\times M[B_{k+1}^\varphi(f_k(x, u_k, \xi_k)) | f_k(x, u_k, \xi_k) \in B_{k+1}^\varphi]\}; \quad (5)$$

6. Для всех $x \in B_k^\varphi, u_k(x) \in U_k$ справедлива система неравенств

$$\begin{cases} M[B_{k+1}^\varphi(f_k(x, u_k, \xi_k))] \geq P(f_k(x, u_k, \xi_k) \in I_{k+1}^\varphi), \\ M[B_{k+1}^\varphi(f_k(x, u_k, \xi_k))] \leq 1 - P(f_k(x, u_k, \xi_k) \in O_{k+1}^\varphi) \end{cases}$$

7. Для $x \in B_k^\varphi$ функция Беллмана удовлетворяет двухстороннему неравенству:

$$\underline{B}_k^\varphi(x) \leq B_k^\varphi(x) \leq \overline{B}_k^\varphi(x), \quad (6)$$

где $\underline{B}_k^\varphi(x)$ - нижняя, $\overline{B}_k^\varphi(x)$ - верхняя оценки функции Беллмана

$$\underline{B}_k^\varphi(x) = \sup_{u_k \in U_k} P(f_k(x, u_k, \xi_k) \in I_{k+1}^\varphi),$$

$$\overline{B}_k^\varphi(x) = \sup_{u_k \in U_k} \{1 - P(f_k(x, u_k, \xi_k) \in O_{k+1}^\varphi)\},$$

причем $\underline{B}_N^\varphi(x) = B_N^\varphi(x) = \overline{B}_N^\varphi(x)$.

8. Субоптимальное управление

$$\underline{u}_k = \arg \max_{u_k \in U_k} P(f_k(x, u_k, \xi_k) \in I_{k+1}^\varphi),$$

- оптимальное при $x \in I_k^\varphi \cup O_k^\varphi$;
- оптимальное при $k = N$;
- максимизирует нижнюю границу $M[B_{k+1}^\varphi(f_k(x, u_k, \xi_k))], \forall x \in B_k^\varphi$.

Благодаря утверждениям из леммы 1, во-первых, удастся определить рекуррентную запись изобелл, которая не зависит от функции Беллмана, во-вторых, найти оптимальное управление для $x \in I_k^\varphi$, не затрагивая при этом уравнение Беллмана и связанные с ними задачи стохастического программирования сложной структуры. При этом из п. 4 заключаем, что определение изобеллы уровня 0 автоматически закрывает вопрос об оптимальном управлении $x \in O_k^\varphi$.

Таким образом, актуальным вопросом остается определение оптимального управления для $x \in B_k^\varphi$. Но используя двухстороннюю оценку из п. 7 удастся найти субоптимальное управление при максимизации левой границы.

4. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО ВЕРОЯТНОСТНОМУ КРИТЕРИЮ

Для решения задачи (3) были сформулированы утверждения, согласно которым

1. для нахождения I_k^φ и O_k^φ выписаны выражения независящее от функции Беллмана и для $x_k \in I_k^\varphi$ и $x_k \in O_k^\varphi$ определили оптимальное управление;
2. для $x_k \in B_k^\varphi$ определили верхнюю и нижнюю границу функции Беллмана, что позволяет найти субоптимальное решение.

Стоит сказать, что нетрудно построить случаи, когда изобелла уровня 1 пустая, невыпуклая и имеет достаточно сложную структуру, к которой данный алгоритм неприменим, но удастся выделить класс задач, где алгоритмом возможно воспользоваться, например, задача импульсной коррекции в работе [3], в которой доказано существование решения и определены изобеллы в явном виде.

Важно отметить, что для вычисления I_k^φ и O_k^φ необходимо на каждом шаге сводить вероятностные ограничения накладываемые на систему, что не всегда удается сделать в силу сложности системы. Это затрудняют возможность нахождения оптимального управления в общем случае для каждого множества B_k^φ , I_k^φ и O_k^φ .

По этой причине хотелось бы иметь возможность в случае систем разной сложности численно получать выражения для B_k^φ , I_k^φ и O_k^φ , что позволит согласно полученным утверждениям выше находить численно субоптимальное управление.

Для решения поставленной задачи необходимо описать численную процедуру, которая будет состоять из 3-х основных частей:

1. Генерация точек для допустимого управления на каждом шаге, возможных состояний системы и вектора случайных возмущений.
2. Вычисление B_k^φ , I_k^φ и O_k^φ для каждого шага.
3. Нахождения субоптимального управления для B_k^φ , I_k^φ и O_k^φ более подробно остановимся на каждом из шагов численной процедуры.

Шаг 1. Генерирование точек

Необходимо получить следующие наборы точек:

- Пусть $U_k \rightarrow \hat{U}_k = \bigcup_{i=1}^{d_k^u} \{u_k^i\}$, $u_k^i \in U_k, k = \overline{0, N}$, где \hat{U}_k - набор управлений, d_k^u - количество точек;
- Пусть $X = \{x \in \mathbb{R}^n: a_1 \leq x_i \leq a_2, i = \overline{1, n}\}$ - ограничения на возможные состояние, тогда $X \rightarrow \hat{X} = \bigcup_{i=1}^{d^x} \{x^i\}, x^i \in X$, где \hat{X} - набор состояний, d^x - количество точек;

- Пусть ξ_k и Ξ_k - носитель ξ_k , тогда $\Xi_k \rightarrow \hat{\Xi}_k = \bigcup_{i=1}^{d_k^{\xi}} \{\xi_k^i\}, \xi_k^i \in \Xi_k, k = \overline{0, N}$
 где $\hat{\Xi}_k$ - набор возмущений, d_k^{ξ} - количество точек.

Для того чтобы сгенерировать набор точек в многомерном пространстве, которой будет распределен равномерно, воспользуемся методом Hit-and-Run [11]. Данный метод позволяет генерировать точки в случае многомерных невыпуклых, несвязных множеств. Следует отметить, что для рассматриваемого алгоритма в статье [11] было доказано, что распределение набрасываемых точек асимптотически равномерно.

Алгоритм (Hit-and-Run):

Пусть $Y \subset \mathbb{R}^q$. Задача получить $\hat{Y} = \bigcup_{i=1}^{d^y} \{y^i\}, y^i \in Y, d^y$ - количество точек

1. Пусть $\hat{Y} = \{y_1\}, y_1 \in Y, d = 1$
2. Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^q: \|x\| \leq 1\}$ - единичная сфера, $V \sim N(S), v$ - реализация V
3. Сгенерировать $v_d, r = v_d / \|v_d\|, L = \{t \in \mathbb{R}^n: y_d + t \cdot r \in Y\}$
4. Сгенерировать $t_d \sim R(L), y_{d+1} = y_d + t_d \cdot r$
5. $\hat{Y} := \hat{Y} \cup \{y_{d+1}\}, d := d + 1$
6. Если $d < d^y$, перейти к п. 2, иначе завершить

Для реализации первого шага необходимо запустить данный алгоритм для $U_k, X, \Xi_k, k = \overline{0, N}$ и на выходе получить $\hat{U}_k, \hat{X}, \hat{\Xi}_k, k = \overline{0, N}$.

Шаг 2. Нахождение изобелл

На прошлом шаге алгоритма был осуществлён переход от исходных возможных управлений, состояний и возмущений к некоторому фиксированному набору точек. Это позволяет переписать I_k^φ и O_k^φ в следующем виде.

Лемма 2.

Введем обозначения для изобелл и их дополнения после выполненного 1 шага B_k^φ, I_k^φ и O_k^φ

1. $I_k^\varphi = Conv(\{x \in \hat{X} : \exists u_k \in \hat{U}_k, \forall \xi \in \hat{\Xi}_k, f_k(x, u_k, \xi_k) \in I_{k+1}^\varphi\}), k = \overline{0, N}$
 $I_{N+1}^\varphi = Conv(\{x \in \hat{X} : \Phi(x) \leq \varphi\}).$
2. $O_k^\varphi = Conv(\{x \in \hat{X} : \forall u_k \in \hat{U}_k, \forall \xi \in \hat{\Xi}_k, f_k(x, u_k, \xi_k) \in O_{k+1}^\varphi\}), k = \overline{0, N}$
 $O_{N+1}^\varphi = Conv(\{x \in \hat{X} : \Phi(x) > \varphi\}).$
3. $B_k^\varphi = Conv(\hat{X} \setminus \{I_k^\varphi \cup O_k^\varphi\}), k = \overline{0, N},$

где $Conv(Y) = \bigcup_{y_1, \dots, y_N \in Y} \bigcup_{\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1, \lambda_i \geq 0} \lambda^T y$ - выпуклая оболочка Y .

Стоит отметить, что так как пространство возможных состояний неограниченно в общем случае, то для того чтобы сгенерировать точки необходимо вместо \mathbb{R}^n перейти, к некоторому многомерному кубу и в случае, если $dist(\bigcup_k I_k^\varphi, \partial \hat{X}) < \gamma,$ где

$dist(A, B) = \min_{a \in A, b \in B} (a, b)$, γ - некоторая константа, то необходимо перейти к шагу 1 и предварительно увеличить радиус куба \hat{X} .

Шаг 3. Вычисление субоптимального управления

В отдельности рассмотрим поставленную задачу для каждого типа состояний

$$\mathbf{B}_k^\varphi, \mathbf{I}_k^\varphi \text{ и } \mathbf{O}_k^\varphi.$$

1. Для $x \in \mathbf{O}_k^\varphi$ субоптимальным управлением на шаге k является любой элемент их множества \hat{U}_k ;

2. Для $x \in \mathbf{I}_k^\varphi$ субоптимальным управлением на шаге k является любой элемент их множества $\hat{U}_k^1(x_k)$:

$$\hat{U}_k^1(x_k) = \{u \in \hat{U}_k : \forall \xi \in \hat{\Xi}_k, f_k(x_k, u, \xi_k) \in \mathbf{I}_{k+1}^\varphi\}.$$

3. Для $x \in \mathbf{B}_k^\varphi$ субоптимальное управление на шаге k находится с использованием стохастического квазиградиента [6] для решения задачи $P_\varphi(u(\cdot)) \rightarrow \max_{u(\cdot) \in U}$

Алгоритм

1. Вычисляем статистическую оценку градиента функции вероятности

$$\xi_l = \frac{1}{2\delta_l} \sum_{j=1}^n [P_l^*(\tilde{u}_{l1}, \dots, u_{lj} + \delta_l, \dots, \tilde{u}_{ln}) - P_l^*(\tilde{u}_{l1}, \dots, u_{lj} - \delta_l, \dots, \tilde{u}_{ln})] e_j,$$

$$P_k^*(u) = \frac{1}{t_l} \sum_{i=1}^{t_l} I(-\Phi(x_N(u_i, \zeta_l^i) \leq \varphi)),$$

где $P_k^*(u)$ - выборочная оценка функции вероятности, $I(A)$ – индикаторная функция, $\tilde{u}_{lj}, j = \overline{1, n}$ - независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[u_{lj} - \delta_l, u_{lj} + \delta_l]$, $\{\zeta_l^i\}_{i=1}^{t_l}$ - выборка соответствующая распределению ζ .

2. Итерационная процедура:

$$u_{l+1} = \begin{cases} \Pi_U[u_l + \rho_l \xi_l], & \|\xi_l\| \leq L \\ u_l, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где l - номер итерации, ρ_l -длина рабочего шага, а константа L достаточно велика.

Общий алгоритм численного решения:

1. Алгоритм *Hit-and-Run* согласно шагу 1 для $U_k, X, \Xi_k, k = \overline{0, N}$ получаем

$$\hat{U}_k, \hat{X}, \hat{\Xi}_k, k = \overline{0, N}$$

2. Для $\hat{U}_k, \hat{X}, \hat{\Xi}_k, k = \overline{0, N}$ находим вид $\mathbf{B}_k^\varphi, \mathbf{I}_k^\varphi$ и \mathbf{O}_k^φ согласно шагу 2.

3. Для каждого $\mathbf{B}_k^\varphi, \mathbf{I}_k^\varphi$ и \mathbf{O}_k^φ находим субоптимальное управление согласно шагу 3.

5. ПРИМЕР

Теория синтеза оптимального управления используется для решения задач из аэрокосмической отрасли, например, задача импульсной коррекции траектории космического аппарата (КА) на геостационарной орбите с помощью корректирующей установки малой тяги. Отклонение КА возникает из-за внешних возмущений и неопределенных факторов, возникающих из-за погрешности и ошибок в вычислении координат и различных параметров системы.

Проверим сформулированный алгоритм на подобной упрощенной модели и сравним с известным оптимальным управлением.

Система управления

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + u_k(1 + \xi_k), \\ x_0 = X_0, \quad k = \overline{0, N} \end{cases}$$

и задача оптимального управления

$$P_\varphi(u(\cdot)) = P(|x_{N+1}| \leq \varphi) \rightarrow \max_{u(\cdot) \in \bar{U}}$$

где $x_k \in \mathbb{R}$, $u_k \in \mathbb{R}$, $\xi_k \sim R[-e, e]$, $e \in (0, 1)$.

В работе [3] было приведено аналитическое решение для более общей задачи и, в частности, для сформулированной выше системы управления. Следует отметить, что в работе [3] было найдено оптимальное управление.

Сравним значения аналитического решения с полученным численным результатами с заданными параметрами и объемами дискретизации:

- $e = 0.5, \varphi = 10, N = 1$;
- $d^x = d^u = d^\xi = 10000$

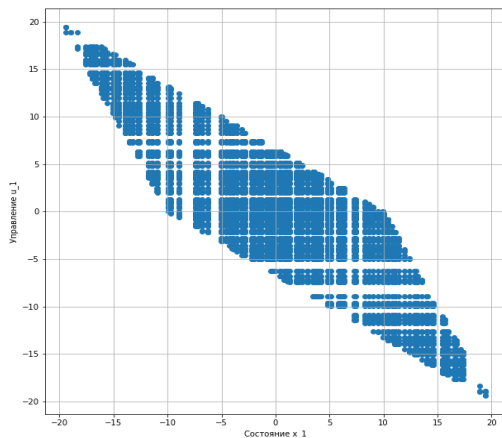


Рис 1. Множество $U_1^1(x_1)$

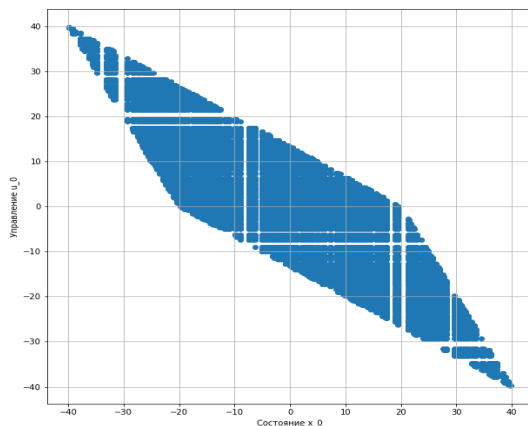


Рис 2. Множество $U_0^1(x_0)$

Приведем сравнения значения управления аналитического и численного значения при $k=1$ и количество итераций 10000:

Таблица 1. Сравнение аналитического и численного значения управления при $k=1$

x	Аналитическое	Численное	Погрешность
25	-23,333333	-23,310258	0,023075
30	-26,666667	-26,665936	0,000731
35	-30,000000	-30,015987	0,015987
40	-33,333333	-33,372321	0,038987
45	-36,666667	-36,645617	0,021050
50	-40,000000	-39,934600	0,065400
55	-43,333333	-43,312343	0,020990
60	-46,666666	-46,656306	0,010360
65	-50,000000	-49,945092	0,054908
70	-53,333333	-53,330231	0,003102
75	-56,666666	-56,663306	0,003360
80	-60,000000	-59,999230	0,000770
85	-63,333333	-63,333223	0,000110
90	-66,666666	-66,621266	0,045400
95	-70,000000	-69,932910	0,067090
100	-73,333333	-73,290328	0,043005

Следует отметить, что численные результаты достаточно близки к аналитическим значениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азанов В.М. Оптимальное управление линейной дискретной системой по критерию вероятности // Автоматика и Телемеханика. 2014. №10. С. 39–51.
2. Азанов В.М., Кан Ю.С. Однопараметрическая задача оптимальной коррекции траектории летательного аппарата по критерию вероятности // Изв. РАН Теория и Системы Управления. 2016. №2. С. 115-128.
3. Азанов В.М. Алгоритмы динамического программирования решения задач оптимального управления дискретной стохастической системой с терминальным вероятностным критерием // Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. 2018.
4. Азанов В.М., Кан Ю.С. Синтез оптимальных стратегий в задачах управления дискретными системами по вероятностному критерию // Автоматика и Телемеханика, 2017, № 6, 57–83.
5. Азанов В.М., Кан Ю.С. Двухсторонняя оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления дискретными системами по вероятностному критерию качества // Автоматика и Телемеханика, 2018, № 2, С. 3–18.
5. Кан Ю.С., Кибзун А.И. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями, Физматлит, М., 2009.
6. Кибзун А.И., Игнатов А.Н. Сведение двухшаговой задачи стохастического оптимального управления с билинейной моделью к задаче смешанного целочисленного линейного программирования. // АИТ. 2016. № 12. С. 89–111.
7. Малышев В.В., Кибзун А.И. Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.:Машиностроение, 1987.
8. Jasour A.M., Aybat N.S., Lagoa C.M. Semidefinite Programming For Chance Constrained Optimization Over Semialgebraic Sets // SIAM Journal on Optimization 25 (3), 1411–1440, 2015.
9. Jasour A.M., Lagoa C.M. Convex Chance Constrained Model Predictive Control //arXiv preprint arXiv:1603.07413, 2016.
10. Smith R.L., “Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly distributed over bounded regions”, Oper. Res., 32:6 (1984), 1296-130

Работа поступила 20.02.2019г.

АЛГОРИТМ ВНЕШНЕЙ АППРОКСИМАЦИИ ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Д.Н. Ибрагимов, Е.Ю. Порцева

В работе рассматривается задача быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным множеством управления. Исследуется достаточное условие применимости аппроксимации выпуклого множества управления для оценки точности гарантирующего решения.

The paper considers the problem of minimum-time for a linear discrete system with a bounded set of controls. We study a sufficient condition for the applicability of the approximation of a convex control set to estimate the accuracy of a guaranteed solution.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Дискретная система управления, задача быстродействия, оптимальное позиционное управление, задача линейного программирования, множество управляемости, выпуклый многогранник, ограниченный полиэдр, выпуклый компакт, полидральная аппроксимация.

ДЛЯ ЦИТАТЫ

Д.Н. Ибрагимов, Е.Ю. Порцева. Алгоритм внешней аппроксимации выпуклого множества допустимых управлений для дискретной системы с ограниченным управлением // Моделирование и анализ данных. 2019. №2. С.83-98.

D.N. Ibragimov, E.Yu. Portseva. The algorithm of external approximation of a convex set of admissible controls for a discrete system with bounded control. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis (Russia). 2019, no.2, pp.83-98.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача быстродействия является классической задачей теории оптимального управления, обладающей естественным функционалом качества.

Изначально данная задача была сформулирована для систем с непрерывным временем и полностью решена для случая линейных ограничений на управление.

Решение, основанное на принципе максимума [1-3] и методе динамического программирования [4], гарантирует, что управление будет релейно, то есть будет являться кусочно-постоянной функцией с конечным числом точек переключения и значениями в вершинах множества допустимых управлений.

Задачи оптимального управления для систем с дискретным временем в общем случае имеют ряд существенных отличий от аналогов с непрерывным временем. Зачастую они сводятся к решению задач выпуклого и линейного программирования [2,6,7,8]. Иногда удается

получить результат, известный как дискретный принцип максимума [6]. Тем не менее, в случае дискретного времени традиционные методы теории оптимального управления оказываются неэффективными при решении задачи быстродействия. Более того, доказано, что формальное применение дискретного принципа максимума дает некорректные результаты [9,10].

Данные проблемы обусловленным дискретным характером критерия качества управления — времени, необходимого для достижения системой начала координат, что приводит к неединственности оптимального управления почти для всех начальных состояний. Актуальным оказывается поиск более эффективных методов.

В работах [9,11,12] рассмотрен метод решения поставленной задачи на основе класса множеств 0-управляемости — множеств тех начальных состояний, из которых система может быть переведена в начало координат за фиксированное число шагов. Алгоритм решения базируется на идее перевода состояния системы на каждом шаге в множество 0-управляемости за меньшее число шагов. В качестве критерия принадлежности состояния множеству используется функционал Минковского. В [11] продемонстрировано, что в случае линейных ограничений на управление задача быстродействия может быть полностью сведена к решению ряда ЗЛП. Однако аналогичный подход для случая выпуклых множеств допустимых управлений приводит к сложным задачам нелинейного математического программирования.

Данный факт делает актуальным решение задачи об аппроксимации множества допустимых управлений вложенным в него многогранником: решение задачи быстродействия для меньшего множества допустимых управлений будет являться гарантирующим решением в исходной задаче. Подобные задачи рассматривались в различных постановках прежде: например, в [13] предложен алгоритм аппроксимации α - ядра для решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь.

Для увеличения точности гарантирующего решения требуется определить критерий качества аппроксимации и построить алгоритм, позволяющий добиться сколь угодно малой величины этого критерия.

Решение поставленной задачи базируется на свойствах выпуклых множеств, рассмотренных в качестве точек метрических пространств [14-19].

Как известно [19], класс выпуклых многогранников является всюду плотным в пространстве компактов с метрикой Хаусдорфа. Данный факт гарантирует, что задача об аппроксимации может быть разрешена. В [12] разработан алгоритм, позволяющий приблизить произвольное выпуклое компактное множество (вписанным) в него многогранником, и доказана сходимости в смысле метрики Хаусдорфа.

Тем не менее, алгоритм, изложенный в [12], не позволяет оценить качество гарантирующего решения, что приводит к актуальности решения задачи об аппроксимации множества допустимых управлений (описанным) вокруг него многогранником. В этом случае оптимальное значение критерия для вспомогательной системы будет не больше, чем для исходной. В то время, как согласно [12] минимальное число шагов, необходимое для достижения 0, у вспомогательной системы будет не меньше, чем у исходной. В работе приведен обзор методов решения задачи быстродействия, изложенных в [9,11,12]. Также построен алгоритм внешней аппроксимации, который базируется на идее, разработанной в [13], которая заключается в процедуре построения равномерной сетки на n -мерном кубе, использующейся как множество нормалей к опорным гиперплоскостям выпуклого компакта.

Доказана сходимость разработанного алгоритма в смысле метрики Хаусдорфа. Эффективность новых методов опробована на примере решения задачи демпфирования высотного сооружения [20].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решается задача быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным управлением в виде выпуклого компактного множества:

$$\begin{aligned}x(i+1) &= Ax(i) + u(i), \\x(0) &= x_0, \\u(i) &\in \mathcal{U}, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.\end{aligned}\tag{1}$$

Где для каждого $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существует $x(i) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u(i) \in \mathbb{R}^n$ – вектор управления, на каждом шаге выбирающийся из множества допустимых управлений $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \mathcal{U}$, $\text{diam } \mathcal{U} < \infty$, предполагается, что $\det A \neq 0$. Требуется перевести систему в ноль из начального состояния посредством допустимого управления за минимальное число шагов.

Наименьшее число шагов, необходимое, чтобы перевести систему из заданного начального состояния в 0 обозначим через N_{min} . Предполагается, что $N_{min} < \infty$, иначе задача быстрействия для системы (1) не имеет решения.

Далее используются следующие понятия:

1. Траектория $\{x^*(i)\}_{i=0}^{N_{min}}$ называется оптимальной, если $x^*(N_{min}) = 0$.

2. Оптимальным управлением $\{u^*(i)\}_{i=0}^{N_{min}-1}$ называется набор векторов из множества допустимых управлений $u^*(i) \in \mathcal{U}$ такой, что $x^*(N_{min}) = 0$.

3. Множество начальных состояний системы, из которых можно перейти в 0 за N шагов посредством выбора допустимых управлений, называется множеством 0-управляемости

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(N) &= \{x_0: \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U}: x(N) = 0\}, \\ \mathcal{X}(0) &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

4. Обозначим через $\mathcal{K} = [-1; 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ n -мерный куб с центром в начале координат и длиной ребра равной 2. Очевидно, что справедливо также представление

$$\mathcal{K} = \left\{x \in \mathbb{R}^n: \max_{k=1, n} |x_k| \leq 1\right\}.$$

Построим на $\partial\mathcal{K}$ равномерную сетку

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_N &= \bigcup_{i=1}^n \left\{0; \pm \frac{1}{N}; \pm \frac{2}{N}; \dots; \pm 1\right\}^{i-1} \times \{-1; 1\} \times \\ &\times \left\{0; \pm \frac{1}{N}; \pm \frac{2}{N}; \dots; \pm 1\right\}^{n-1}.\end{aligned}$$

Заметим, что N_{min} можно также определить с помощью класса множеств 0-управляемости:

$$N_{min} = \min \{N \in \mathbb{N} \cup \{0\}: x_0 \in \mathcal{X}(N)\}.\tag{3}$$

Для случая, когда множество допустимых управлений системы (1) имеет вид многогранника или полиэдра решение известно и сводится к решению задачи линейного программирования [11], но в случае, когда \mathcal{U} – произвольный выпуклый компакт, возникает

трудновычислимая задача выпуклого программирования. Для решения этой проблемы было предложено аппроксимировать множество допустимых управлений вписанным многогранником \underline{U}_R . Решение задачи быстродействия для вспомогательной системы будем называть гарантирующим. Для оценки N_{min} аппроксимируется множество допустимых управлений описанным многогранником \overline{U}_R . Тогда, имея $\underline{U}_R \subset \mathcal{U} \subset \overline{U}_R$, получаем оценку $N_{min} \geq N_{min} \geq \overline{N}_{min}$.

Однако величина $N_{min} - \overline{N}_{min}$ может быть велика, в этом случае необходимо улучшить качество аппроксимации, а следовательно нужен критерий качества. Для критерия качества аппроксимации выпуклого множества многогранниками выбрана метрика Хаусдорфа

$$\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\| \right\},$$

так как согласно [5] многогранники плотны в $\mathbb{K}_n = \{\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n: \mathcal{X} - \text{компакт}\}$, а само метрическое пространство (\mathbb{K}_n, ρ_H) является полным.

Формулируется следующая задача.

Задача:

Построить последовательность $\{\overline{U}_R\}_{R=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}_n: \overline{U}_R$ – описанный многогранник,

$$\mathcal{U} \subset \overline{U}_R: \rho_H(\mathcal{U}, \overline{U}_R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Решение задачи для \overline{U}_R даёт оценку снизу N_{min} , что позволяет судить о качестве гарантирующего решения.

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

В данном разделе приводятся обзор методов из [9,11,12], посвящённых решению задачи быстродействия в случае, когда \mathcal{U} – многогранник, а так же метод построения гарантирующего решения для произвольного выпуклого \mathcal{U} .

Так как решение задачи строится на классе множеств 0-управляемости, сформулируем свойства этого класса.

Лемма 1 [11].

Пусть класс множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определён соотношениями (2). Тогда верно представление

$$\mathcal{X}(N) = - \sum_{i=1}^N A^{-i} \mathcal{U}. \quad (4)$$

Следствие 1 [11].

Пусть $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношением (2). Тогда



$$\mathcal{X}(N + 1) = A^{-1} \mathcal{X}(N) + (-A^{-1} \mathcal{U}).$$

Лемма 2 [11].

Справедливы следующие свойства класса множеств θ -управляемости для любого $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

1. $\mathcal{X}(N)$ – выпуклый компакт;
2. $\mathcal{X}(N) \subset \mathcal{X}(N + 1)$.
3. Если \mathcal{U} – многогранник, то $\mathcal{X}(N)$ – многогранник.

Рассмотрим случай, когда на управление в системе (1) наложены только линейные ограничения:

$$\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^K \{u: (u, n^k) \leq a_k\}. \tag{5}$$

То есть множество допустимых управлений $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид полиэдра, ограниченного конечным числом гиперплоскостей с векторами нормалей $n^k \in \mathbb{R}^n$, ориентированными вонне множества \mathcal{U} . Известно, что в случае (5) задача быстродействия может быть сведена к задаче линейного программирования. Данный факт базируется на следующих свойствах класса выпуклых многогранников, доказанных в [11].

Лемма 3 [11].

Пусть $\mathcal{X} = \text{conv}\{v^1, \dots, v^M\}$ – многогранник и $x \in \mathbb{R}$, тогда вычисление значения $\mu(x, \mathcal{X})$ сводится к решению задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \mu(x, \mathcal{X}) &= \min_{r, \lambda_1, \dots, \lambda_M} r, \\ x &= \sum_{i=1}^M \lambda_i v^i, \\ \sum_{i=1}^M \lambda_i &\leq r, \\ 0 &\leq \lambda_i \leq r, i = \overline{1, M}. \end{aligned} \tag{6}$$

Лемма 4 [11].

Включение $x \in \mathcal{X}$ верно тогда и только тогда, когда $\mu(x, \mathcal{X}) \leq 1$.

Определим функционал

$$S_N(x) = \arg \min_{u \in \mathcal{U}} \mu(x + u, \mathcal{X}(N))$$

Согласно лемме 3, вычисление функционала $S_N(x)$ в любой точке $x \in \mathbb{R}^n$ сводится к решению ЗЛП

$$\begin{aligned}
 & \min_{r, \lambda_1, \dots, \lambda_M, u} r, \\
 & x + u = \sum_{j=1}^M v^j \lambda_j, \\
 & \sum_{j=1}^M \lambda_j \leq r, \\
 & 0 \leq r \leq 1, \\
 & (u, n^k) \leq \alpha_k, k = \overline{1, K}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Далее приведена теорема, предлагающая вид оптимального позиционного управления в задаче быстродействия для системы (1) с управлением вида (5), доказанная в [11].

Теорема 1 [12].

Пусть для некоторого заданного $x_0 \in \mathbb{R}^n$ траектория системы (1) с управлением вида (5) определяется соотношениями

$$\begin{aligned}
 x(i+1) &= A x(i) + S_{N_{min}-i-1}(A x(i)), i = \overline{0, N_{min}-1}, \\
 x(0) &= x_0.
 \end{aligned}$$

Тогда

1. $x(N_{min}) = 0$,
2. оптимальное позиционное управление на i -м шаге имеет вид

$$u^*(i, x(i)) = S_{N_{min}-i-1}(A x(i)).$$

Алгоритм внутренней аппроксимации состоит из двух этапов. На первом этапе строится сетка на кубе и обозначаются узлы. На втором этапе определяется максимальное число, на которое нужно умножить узел из \mathcal{K}_N , чтобы он оставался внутри множества допустимых управлений. Таким образом, продолжив векторы из сетки на кубе до границы множества, получим совокупность вершин многогранника, вписанного в выпуклое множество допустимых управлений.

То есть, получив решение на множестве $\underline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ можно говорить о гарантирующем решении. А с увеличением качества аппроксимации решение будет стремиться к оптимальному. Таким образом, необходимо построить сходящуюся последовательность многогранников к \mathcal{U} .

Доказательство предложенного метода описано в работе [12] Далее представлена основная теорема, которая доказывает сходимость алгоритма внутренней аппроксимации.

Лемма 5 [12].

Пусть отображение $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно во всём \mathbb{R}^n . Тогда отображение $T: \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$ также являются непрерывным во всём \mathbb{K}_n , где

$$T(\mathcal{X}) = \{y \in \mathbb{R}^n: \exists x \in \mathcal{X}, y = T(x)\}.$$

Определим вспомогательную функцию

$$\alpha(x, \mathcal{X}) = \max_{\alpha x \in \mathcal{X}; \alpha > 0} \alpha.$$

где $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$ – некоторый выпуклый компакт такой, что $0 \in \text{int } \mathcal{X}$. Тогда отображение $T_{\mathcal{X}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ можно сформулировать следующим образом

$$T_{\mathcal{X}}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha(x, \mathcal{X})}{\alpha(x, \mathcal{K})} x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Теорема 2 [12].

Пусть $\mathcal{X} \in \mathbb{K}_n$ – выпуклое множество, $0 \in \text{int } \mathcal{X}$. Тогда

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}_N) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \partial \mathcal{X}, \\ \text{conv } T_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}_N) &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Заметим, что множество $\text{conv } T_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}_N)$ является многогранником, причём, верно включение

$$\text{Ext conv } T_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}_N) \subset T_{\mathcal{X}} \mathcal{X}(\mathcal{K}_N).$$

То есть фактически теорема 4 гарантирует, что выбирая номер N , можно с любой степенью точности (в смысле расстояния Хаусдорфа) аппроксимировать произвольный выпуклый компакт вложенным в него многогранником.

Таким образом, аппроксимируя множество управления снизу, можно получить гарантированное число шагов, за которое возможно перевести систему из заданного начального значения в ноль. Запишем сам алгоритм внутренней аппроксимации.

Алгоритм 1. Алгоритм внутренней аппроксимации выпуклого множества допустимых управлений

1. Построить сетку \mathcal{K}_R на n -мерном кубе. Обозначить узлы через n^k , где $k = 1, \dots, R$.

2. Определить значение следующей функции

$$\alpha(n^k, \mathcal{U}) = \max_{\substack{\alpha n^k \in \mathcal{U}; \\ \alpha > 0}} \alpha$$

3. Найти вершины многогранника $\underline{\mathcal{U}}_R$

$$T_{\mathcal{U}}(n^k) = \frac{\alpha(n^k, \mathcal{U})}{\alpha(n^k, \mathcal{K})} n^k. \quad (8)$$

4. Если $k = R$, то все вершины найдены, иначе увеличить k на 1 и вернуться к шагу 2.

Таким образом полученное множество $\underline{\mathcal{U}}_R$ представляет собой многогранник вписанный в \mathcal{U} , но содержит в себе меньше векторов управлений, что влияет на решение задачи быстродействия. Т.е. при решении задачи мы получаем оценку сверху минимального числа шагов, за которое систему (1) можно перевести в 0.

Для оценки снизу минимального числа шагов необходима аппроксимация сверху множества допустимых управлений.

4. АЛГОРИТМ ВНЕШНЕЙ АППРОКСИМАЦИИ

Для решения задачи быстродействия с ограниченным управлением в виде произвольного выпуклого множества необходима также аппроксимация сверху. Полученное множество допустимых управлений будет содержать больше векторов управления, таким образом, используя это множество, можно привести систему (1) в 0 за меньшее число шагов.

Алгоритм заключается в двух этапах. На первом этапе строится сетка на кубе и обозначаются узлы. На втором этапе узлы на сетке куба рассматриваются как нормали к опорным гиперплоскостям к множеству \mathcal{U} . Совокупность всех гиперплоскостей образует описанный вокруг \mathcal{U} многогранник. На основе этих рассуждений запишем теоремы об аппроксимации.

Теорема 3.

Пусть $\bar{\mathcal{U}} \in \mathbb{K}_n$ такое, что $\mathcal{U} \subset \bar{\mathcal{U}}$.

1. Тогда для множеств θ -управляемости будет выполнено следующее включение:

$$\mathcal{X}(N) \subset \bar{\mathcal{X}}(N), N \in \mathbb{N},$$

где $\bar{\mathcal{X}}(N)$ – множество θ -управляемости вспомогательной системы с множеством допустимых управлений $\bar{\mathcal{U}}$.

2. Тогда $\bar{N}_{\min} \leq N_{\min}$, где \bar{N}_{\min} – минимальное число шагов, за которое систему (1) можно перевести в 0 посредством выбора управления из $\bar{\mathcal{U}}$.

Доказательство

Доказательство пункта 1 теоремы непосредственно следует из леммы 2, а доказательство пункта 2 непосредственно следует из леммы 2 и соотношения (3).

Рассмотрим в качестве внешней аппроксимации для некоторого $N \in \mathbb{N}$ следующее множество:

$$\bar{\mathcal{U}}_R = \bigcap_{p \in \mathcal{K}_N} \left\{ u \in \mathbb{R}^n : (p, u) \leq \max_{y \in \mathcal{U}} (p, y) \right\} \quad (9)$$

Сформулируем и докажем теорему о сходимости.

Теорема 4.

Пусть $\bar{\mathcal{U}}_R$ определяется соотношением (11). Тогда

$$\rho_N(\bar{\mathcal{U}}_N, \mathcal{U}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Доказательство

В силу леммы 9 из [12]

$$\mathcal{K}_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{K},$$

Также для каждого $N \in \mathbb{N}$ верно включение $\mathcal{U} \subset \bar{\mathcal{U}}_R$.

Пусть $\hat{u} \in \overline{U}_R \setminus U$, тогда по теореме об опорной гиперплоскости [21] существует $p \in \mathcal{K}$ такой, что

$$(p, \hat{u}) > \max_{u \in U} (p, u).$$

Обозначим $\delta = (p, \hat{u}) - \max_{u \in U} (p, u) > 0$ и выберем $p' \in \mathcal{K}_R$ такой, что $\|p' - p\| < \delta$.

$$|(p', \hat{u}) - (p, \hat{u})| = |p' - p, \hat{u}| \leq \|p' - p\| \cdot \|\hat{u}\| \leq \delta \|\hat{u}\| \leq \delta \max_{u \in U} \|u\| = \delta.$$

Тогда при $u^* = \arg \max_{u \in U} (p, u)$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \max_{u \in U} (p', u) - \max_{u \in U} (p, u) &= (p', u^*) - \max_{u \in U} (p, u) \leq (p', u^*) - (p, u^*) = \\ &= (p' - p, u^*) \leq \|p' - p\| \cdot \|u^*\| \leq \delta \|u^*\| \leq \delta \max_{u \in U} \|u\| = \delta. \end{aligned}$$

Если выбрать δ так, чтобы $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, то

$$\begin{aligned} (p', \hat{u}) - \max_{u \in U} (p', u) &\geq (p, \hat{u}) - \delta - \max_{u \in U} (p', u) \geq \\ &\geq (p, \hat{u}) - \delta - \max_{u \in U} (p, u) - \delta \geq \varepsilon - 2\delta > 0. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим $\rho_H(\overline{U}_R, U)$. Учтывая, что $\overline{U}_R \subset U$,

$$\rho_H(\overline{U}_R, U) = \sup_{x \in \overline{U}_R} \inf_{y \in U} \|x - y\|.$$

Поскольку для любых $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\inf_{y \in U} \|x - y\| > \varepsilon$, существует $R' \in \mathbb{N}$,

удовлетворяющий условию

$$\forall R'' \geq R'u \notin \overline{U}_{R''} \Rightarrow \rho_H(\overline{U}_{R''}, U) \leq \varepsilon.$$

Откуда

$$\rho_H(\overline{U}_R, U) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Как видно последовательность множеств $\{\overline{U}_R\}_{R=1}^{\infty}$ сходится к исходному множеству

U с точки зрения расстояния Хаусдорфа.

Таким образом, получив оценку снизу минимального числа шагов, за которое возможно перевести систему из начального положения в ноль, можно рассуждать о качестве нижней аппроксимации множества допустимых управлений. Улучшая аппроксимацию, можно получить более точное решение. Запишем алгоритм внешней аппроксимации выпуклого множества допустимых управлений.

Алгоритм 2. Алгоритм внешней аппроксимации выпуклого множества допустимых управлений

1. Построить сетку \mathcal{K}_R на n -мерном кубе. Обозначить узлы через n^k , где $k = 1, \dots, R$.

2. Для всех $k = \overline{1, R}$ определить граничные точки множества \mathcal{U} как $u^k = \arg \max_{u \in \mathcal{U}} (n^k, u)$,

и вычислить величины

$$\alpha_k = (n^k, u^k).$$

3. Составить полиэдр

$$\overline{\mathcal{U}}_R = \bigcap_{k=1}^R \{u: (n^k, u) \leq \alpha_k\}.$$

Построенное множества $\overline{\mathcal{U}}_R$ имеет вид полиэдра, в то время как множество $\underline{\mathcal{U}}_R$, построенное по алгоритму внутренней аппроксимации, имеет вид многогранника.

5. ЗАДАЧА ДЕМПФИРОВАНИЯ ВЫСОТНОГО СООРУЖЕНИЯ

Эффективность предложенных методов продемонстрирована на примере решения задачи демпфирования здания, расположенного в зоне сейсмических активностей. Данная модель была рассмотрена в [20].

Из-за сейсмических активностей возникают колебания сооружений, которые способствуют потере устойчивости и разрушению строения. Для гашения таких колебаний разработана задача управления сооружением по принципу обратной связи, за счёт дополнительных прикладываемых сил на это сооружение. Известны и широко применимы два совершенно противоположных метода управления сооружения по принципу обратной связи, а именно: динамическое гашение колебаний с использованием дополнительных материальных тел и виброзащита, предполагающая изоляцию сооружения от подвижного основания. Один из возможных вариантов технической реализации динамического гашения колебаний заключается в создании специального этажа с размещением на нем некоторой достаточно малой массы (по сравнению с общей массой сооружения), перемещаемой в соответствии с законом управления в форме обратной связи по текущим показаниям датчиков, что позволяет оказывать управляющее воздействие на данный этаж.

В качестве механической системы, моделирующей колебания высотного сооружения, будем рассматривать одномерную цепочку упругосвязанных материальных точек (этажей или секций сооружения), одна из которых (основание) совершает поступательное движение, порождаемое сейсмическим воздействием. Предполагается, что масса основания намного превышает массы остальных материальных точек и поэтому влиянием движения секций сооружения на движение основания можно пренебречь. В дальнейшем будем считать, что массы всех материальных точек одинаковы, а упругие и демпфирующие связи моделируются линейными элементами с одинаковыми коэффициентами упругости и демпфирования.

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид:

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_1(t) = -2b\dot{\xi}_1(t) - 2c\xi_1(t) + b\dot{\xi}_2(t) + c\xi_2(t) + U_1(t), \\ \vdots \\ m\ddot{\xi}_i(t) = -2b\dot{\xi}_i(t) - 2c\xi_i(t) + b\dot{\xi}_{i-1}(t) + \\ c\xi_{i-1}(t) + b\dot{\xi}_{i+1}(t) + c\xi_{i+1}(t) + U_i(t), \\ \vdots \\ m\ddot{\xi}_n(t) = -2b\dot{\xi}_n(t) - 2c\xi_n(t) + b\dot{\xi}_{n-1}(t) + c\xi_{n-1}(t) + U_n(t), \end{cases} \quad (10)$$

где ξ_i – координата i -й материальной точки относительно основания, U_i – управляющая сила, приложенная к i -й материальной точке; m – масса материальной точки, b и c – коэффициенты демпфирования и упругости межсекционных связей.

Введем обозначения

$$y(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \\ \dot{\xi}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n(t) \end{pmatrix}, v(t) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_1(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \frac{b}{m}, \omega^2 = \frac{c}{m}.$$

Тогда уравнения (10) можно привести к каноническому виду

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= A y(t) + v(t), \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\omega^2 K & -\beta K \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие значения параметров. Пусть высота здания составляет 6 этажей, то есть $n = 6$. Также пусть $\beta = 1, \omega^2 = 100$. Значение параметров выбраны на основе модели, построенной в [20]. Полагая, что управление $v(t)$ является кусочно-постоянной функцией, меняющей свои значения через промежутки времени Δt , можно перейти к дискретному аналогу системы (10), обозначив

$$x(i) = y(i \Delta t).$$

Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная система решений (10). Тогда, полагая $v(i) = v_i$, справедливо представление

$$x(i+1) = \Phi(\Delta t) \Phi^{-1}(0) x(i) + (\Phi(\Delta t) \Phi^{-1}(0) A^{-1} - A^{-1}) v_i.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \Phi(\Delta t) \Phi^{-1}(0), \\ B &= \Phi(\Delta t) \Phi^{-1}(0) A^{-1} - A^{-1}, \\ u(i) &= v_i, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Окончательно получим систему

$$\begin{aligned} x(i+1) &= \tilde{A} x(i) + B u(i), \\ x(0) &= y_0, u(i) \in \mathcal{U}. \end{aligned} \quad (11)$$

Где матрицы $\hat{A}, B \in \mathbb{R}^{12}$ – матрицы дискретной системы, \mathcal{U} – множество допустимых управлений непрерывной системы, $x(i)$ – состояние системы на i -м шаге.

Будем полагать, что демпфирующие устройства установлены между 1-м и 2-м, 3-м и 4-м, 5-м и 6-м этажами. Тогда $u_2(i) = u_4(i) = u_6(i) = 0$, а множество допустимых управлений фактически является трёхмерным шаром. В данном случае теорема 1 неприменима, что затрудняет процесс решения задачи. То есть необходима аппроксимация множества допустимых управлений многогранником. Применим алгоритмы аппроксимаций 1 и 2 для аппроксимации. Полученные результаты изображены на рисунках 1-4.

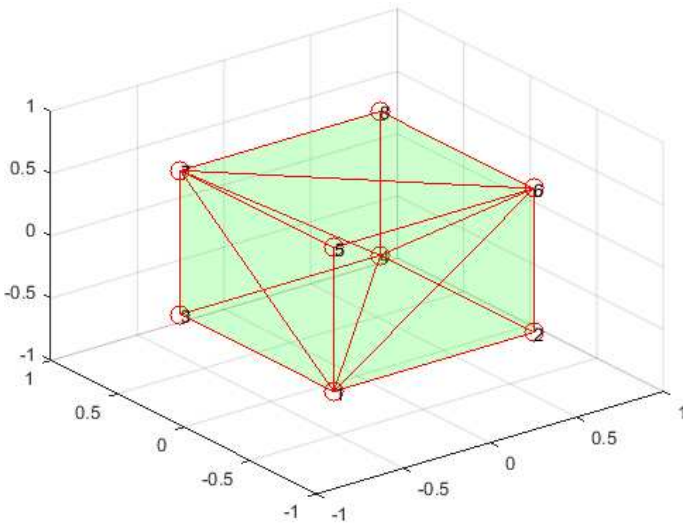


Рис. 1. Аппроксимация \mathcal{U} снизу для 8 точек

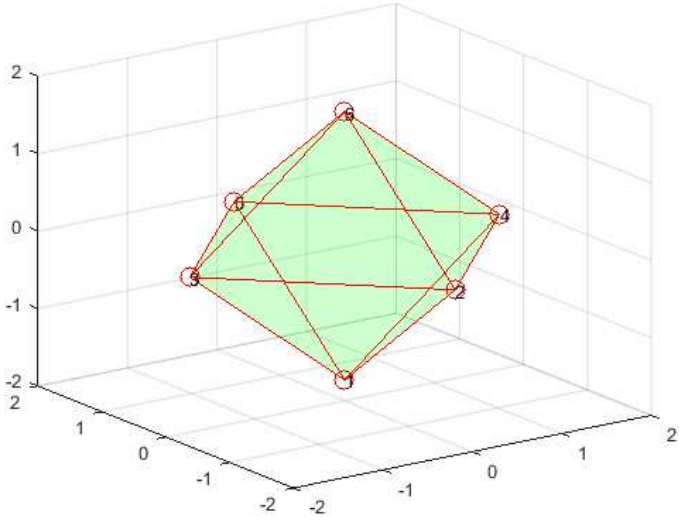


Рис. 2. Аппроксимация U сверху для 8 точек

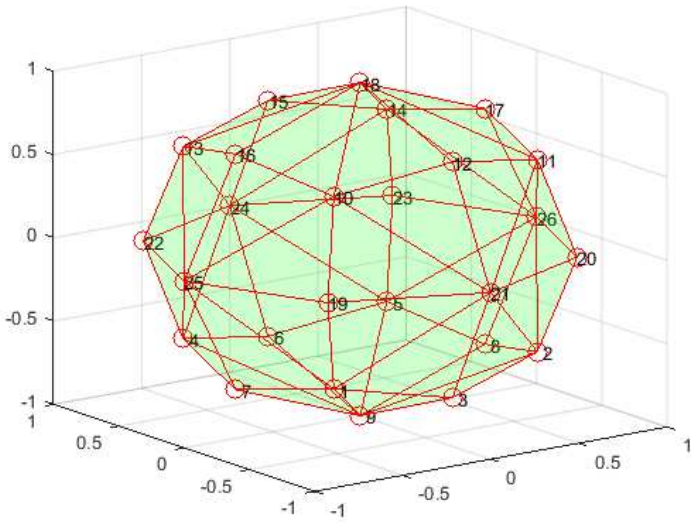


Рис. 3. Аппроксимация U снизу для 27 точек

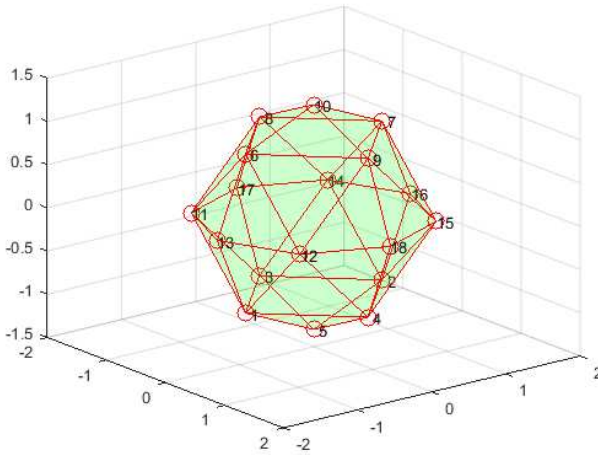


Рис. 4. Аппроксимация \mathcal{U} сверху для 27 точек

Таким образом, для построения гарантирующего решения после аппроксимации \mathcal{U} можно использовать теорему 1. Для начального состояния $y(0) = (0, -1, 0.5, 2.5, 1, 2, 3, 4, 3, 5, 6, 6.5)^T$ получены следующие результаты:

$$\bar{N}_{min} = 4, \bar{N}_{min} = 3.$$

Гарантирующие управления и траектория системы приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Оптимально позиционное управление.

k	0	1	2	3
$u_1^*(k)$	-0.0250	-0.0038	0.0436	-0.0011e-03
$u_2^*(k)$	-0.0440	-0.0016	0.1213	0.0147e-03
$u_3^*(k)$	-0.0650	0.0016	0.2151	0.0312e-03
$u_4^*(k)$	-0.0770	-0.0005	0.2347	0.0397e-03
$u_5^*(k)$	-0.0900	0.0069	0.3381	0.0489e-03
$u_6^*(k)$	-0.0920	0.0080	0.3521	0.0525e-03
$u_7^*(k)$	0.0420	-0.0057	-0.1801	-0.0217e-03
$u_8^*(k)$	0.0580	0.0004	-0.1755	-0.0635e-03
$u_9^*(k)$	0.0290	0.0404	0.2582	-0.0774e-03
$u_{10}^*(k)$	-0.5410	0.3670	4.8355	0.1180e-03
$u_{11}^*(k)$	0.0850	0.0721	0.3589	-0.0515e-03
$u_{12}^*(k)$	-0.1260	-0.0631	-0.1537	0.0345e-03

Таблица 2. Траектория системы.

k	0	1	2	3	4
$x_1^*(k)$	0	-0.0250	-0.0288	0.0148	0
$x_2^*(k)$	-1	0.0804	0.0788	0.0107	0
$x_3^*(k)$	0.5	-0.1489	-0.0471	0.0233	0
$x_4^*(k)$	2.5	0.1990	0.0313	0.0244	0
$x_5^*(k)$	1	-0.1683	0.0386	0.0155	0
$x_6^*(k)$	2	0.0708	0.0043	0.0277	0
$x_7^*(k)$	3	1.2298	1.2241	0.5678	0
$x_8^*(k)$	4	-1.8200	-2.391	-0.6328	0
$x_9^*(k)$	3	3.0290	3.8135	0.3671	0
$x_{10}^*(k)$	5	-5.3192	-4.9522	-0.1167	0
$x_{11}^*(k)$	6	6.0850	4.4845	0.3275	0
$x_{12}^*(k)$	6.5	0.6272	-0.2892	-0.2044	0

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача быстродействия для линейных дискретных систем с ограниченным управлением. Рассматривалось множество управлений в виде выпуклого компакта. Для решения данной задачи разработан алгоритм внешней аппроксимации множества допустимых управлений. Доказана теорема о сходимости аппроксимированного множества к исходному множеству. Построен метод оценки критерия качества гарантирующего решения в задаче быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным управлением.

Отдельно рассмотрена задача быстродействия для демпфирующей системы здания в зоне сейсмических активностей. Произведена дискретизация непрерывной системы. Для заданного множества допустимых управлений в виде трёхмерного шара проведена аппроксимация по предложенному алгоритму и приведены иллюстрации. Найдено гарантирующее управление и траектория системы.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-08-00128-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.:Наука, 1969.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.:Наука, 1969.
3. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.:Наука, 2005.
4. Беллман Р. Динамическое программирование. М.:ИИЛ, 1960.
5. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.:Наука, 1973.
6. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.:Наука, 1973.
7. Квасернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.:Мир, 1977.
8. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. М.:Наука, 1975.
9. Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О задаче оптимального быстрогодействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // Автоматика и Телемеханика. 2015. №9. С.3-30.
10. Fisher M.E., Gayek J.E. Estimating Reachable Sets for Two-Dimensional Linear Discrete Systems // J. Optim. Theory Appl. 1988. V.56. No.1. P.67-88.
11. Ибрагимов Д.Н. Оптимальное по быстродействию управление движением аэростата // Труды МАИ. 2015. №83.
12. Ибрагимов Д.Н. Аппроксимация множества допустимых управлений в задаче быстрогодействия линейной дискретной системой // Труды МАИ. 2016. №87.
13. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Метод решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь // Автоматика и телемеханика. 2015. №9. С.83-101.
14. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004.
15. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2012.
16. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. М.:Постмаркет, 2000.
17. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1, 2. М.: Мир, 1991.
18. Овсеевич А.И., Черноусько Ф.Л. Свойства оптимальных эллипсоидов, приближающих области достижимости системы с неопределённостями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004, №4. С.8-18.
19. Берже М. Геометрия. Том 2. М.:МИР, 1984.
20. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.:Физматлит, 2007.
21. Дж. фон Нейман. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. - 708 с.

Работа поступила 20.02.2019г.

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 004.942

МЕТАЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДВУХУРОВНЕВОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

С.В. Иванов, А.Н. Пономаренко

Формулируется стохастическая двухуровневая задача размещения предприятий, в которой фигурируют два игрока: лидер и последователь. Первым свои предприятия размещает лидер, а затем последователь. Доход, получаемый от потребителей, предполагается случайным. На этапе принятия решения игрокам известен только закон распределения случайного дохода. Цель обоих игроков состоит в максимизации гарантированной с заданной вероятностью прибыли. Для случая гауссовского распределения случайных параметров задача сводится к детерминированной двухуровневой задаче. Для решения полученной задачи предлагаются два алгоритма, основанные на адаптации метаэвристических методов: метода имитации отжига и метода поиска с чередующимися окрестностями. На примере задачи размещения электростанций проводится сравнение эффективности двух разработанных алгоритмов.

We formulate a stochastic bilevel facility location problem with two players: leader and follower. The leader locates his facilities first before the follower does. The income got from consumers is assumed to be random. When the decision makes, the players know only the distribution of the random parameters. The players intend to maximize the income ensured with a given probably. For Gaussian distribution of random parameters, the problem is reduced to a deterministic bilevel one. To solve the problem, two algorithms are suggested. The algorithms are based on modifications of metaheuristic methods: simulated annealing and variable neighborhood search. We compare the efficiency of the developed algorithms for a power plant location problem.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Двухуровневая задача, стохастическая задача, квантиль, окрестности, метод имитации отжига, метод чередующихся окрестностей.

ДЛЯ ЦИТАТЫ

С.В. Иванов, А.Н. Пономаренко. Метаэвристические методы решения двухуровневой стохастической задачи размещения предприятий // Моделирование и анализ данных. 2019. №2. С.99-108.

S.V. Ivanov, A.N. Ponomarenko. Metaheuristic methods for solving a bilevel stochastic facility location problem. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis (Russia). 2019, no.2, pp.99-108.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача конкурентного размещения предприятий описывается ситуацией, когда двое игроков в установленном порядке размещают свои предприятия с целью получения максимальной прибыли. Постановка данной задачи, методы ее исследования и ряд алгоритмов ее решения описаны в работе [1].

Для описания исследуемой задачи используется аппарат двухуровневой оптимизации [4,5]. Двухуровневые модели описывают взаимодействие двух игроков, поочередно принимающих решения. При этом предполагается, что игроки владеют полной информацией друг о друге. Применение моделей данного класса в близких задачах энергетики обсуждается в [5].

В силу случайной природы спроса на производимую продукцию на этапе принятия решения игрокам может быть неизвестна реализация спроса в момент реализации продукции. Поэтому возникает необходимость рассмотрения стохастических задач размещения предприятий. Обзор работ в этом области можно найти в [7]. Если лицу, принимающему решение, необходимо обеспечить гарантированную с некоторой вероятностью прибыль, то целесообразно использовать аппарат задач стохастического программирования с квантильным критерием. Квантильный критерий [3] описывает уровень потерь, который не может быть превышен с заданной вероятностью.

Задача конкурентного размещения предприятий с квантильным критерием была сформулирована в работе [2], где рассматривался случай дискретного распределения случайных параметров. При этом предполагалось, что реализация случайных параметров неизвестна только лидеру, тогда как последователь принимает решение при уже известной реализации спроса. Для данной задачи предложен метод поиска локально-оптимального решения и метод поиска нижней оценки оптимального решения. В [6] на основе комбинаторных методов предложен метод поиска улучшенной нижней оценки оптимального решения данной задачи.

В статье рассматривается двухуровневая задача конкурентного размещения предприятий в форме квантили в пессимистической постановке, т.е. лидер, при поиске оптимального решения, учитывает наихудшую для себя стратегию последователя. В отличие от [2,6], в исследуемой задаче ни лидеру, ни последователю не известны реализации случайных параметров. Для поиска оптимального решения лидера предлагается два алгоритма, основанные на метаэвристических методах: методе имитации отжига и поиске с чередующимися окрестностями.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сформулируем стохастическую задачу конкурентного размещения предприятий. Предполагается наличие двух игроков, по очереди размещающих свои предприятия с целью получения максимальной прибыли. Первый игрок называется лидером, а второй – последователем. Приведем описание параметров и оптимизационных переменных исследуемой математической модели.

Детерминированные параметры:

$I = \{1 \dots n\}$ – множество мест для размещения предприятий;

$J = \{1 \dots m\}$ – множество потребителей;

$f \in \mathbb{R}^n$ – вектор затрат, состоящий из компонент f_i , соответствующих стоимости

размещения предприятия в i -м месте;

$D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – матрица предпочтений, состоящая из компонент d_{ij} , которые показывают приоритетность посещения i -го предприятия j -м потребителем. Неравенство $d_{i_1 j} > d_{i_2 j}$ означает, что для j -го потребителя посещение i_1 -го предприятия предпочтительнее, чем i_2 -го.

Случайные параметры:

X – матрица размерности $m \times n$, состоящая из случайных компонент X_{ij} , описывающих прибыль, получаемую i -м предприятием при его посещении j -м потребителем (реализация данной случайной матрицы и ее компонент обозначаются через χ и χ_{ij} соответственно).

Оптимизационные переменные:

$u \in \mathbb{R}^n$ – вектор размещения предприятий лидера, компоненты $u_i \in \{0; 1\}$, которого показывают, в каких местах лидер разместил свои предприятия. Если $u_i = 1$, то лидер разместил предприятие в i -м месте, если $u_i = 0$, то не разместил;

$U \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – матрица, описывающая выбор предприятий лидера для обслуживания потребителей, если i -е предприятие лидера обслуживает j -го потребителя, то $u_{ij} = 1$, в противном случае $u_{ij} = 0$ (потребитель может посетить только одно из открытых предприятий, при этом должны учитываться его предпочтения);

$y \in \mathbb{R}^n$ – вектор размещения предприятий последователя, компоненты $y_i \in \{0; 1\}$, которого показывают, в каких местах последователь разместил свои предприятия. Если $y_i = 1$, то последователь разместил предприятие в i -м месте, если $y_i = 0$, то не разместил;

$Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – матрица, описывающая выбор предприятий лидера для обслуживания потребителей, если i -е предприятие последователя обслуживает j -го потребителя, то $y_{ij} = 1$, в противном случае $y_{ij} = 0$.

Набор стратегий лидера обозначим через $\bar{u} = (u, U)$, а набор стратегий последователя – через $\bar{y} = (y, Y)$.

Функция потерь лидера имеет вид:

$$F(\bar{u}, \bar{y}, x) = \sum_{i=1}^n f_i u_i - \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_{ij} u_{ij} \right) \left(1 - \sum_i y_{ij} \right),$$

где первая сумма выражает затраты на размещение предприятий, а вторая сумма – полученную прибыль от потребителей с учетом возможного перехода потребителей к последователю после открытия новых предприятий. Естественно, лидер стремится обеспечить отрицательное значение функции потерь, что соответствует получению положительной прибыли.

Аналогичным образом записывается функция потерь последователя:

$$f(\bar{u}, \bar{y}, x) = \sum_{i=1}^n f_i y_i - \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_{ij} y_{ij} \right).$$

Рассмотрим функцию квантили, определённую по правилу

$$\Phi_{\alpha}(\bar{u}, \bar{y}) = \min\{\varphi: P\{F(\bar{u}, \bar{y}, X) \leq \varphi\} \geq \alpha\},$$

где $\alpha \in (0, 1)$ – заданный уровень надёжности. Данная функция квантили выражает потери лидера, непревышение которых гарантируется с вероятностью α . Как правило, значение α выбирается близким к единице.

Аналогичным образом можно записывать квантиль потерь последователя:

$$\varphi_{\beta}(\bar{u}, \bar{y}) = \min\{\varphi: P\{f(\bar{u}, \bar{y}, X) \leq \varphi\} \geq \beta\},$$

где $\beta \in (0, 1)$ – уровень надёжности последователя. Выбор уровня надёжности характеризует склонность игрока к риску, в общем случае может быть разным у лидера и последователя.

Последователь размещает предприятия, когда уже известна стратегия лидера $\bar{u} = (u, U)$. Последователь выбирает свою стратегию $\bar{y} = (y, Y)$ как решение оптимизационной задачи

$$\varphi_{\beta}(\bar{u}, \bar{y}) \rightarrow \min_{\bar{y}}$$

при ограничениях

$$y_i \in \{0, 1\},$$

$$\sum_{i=1}^n y_{ij} \leq 1,$$

$$y_i \geq y_{ij},$$

$$y_i + u_i + \sum_{l: d_{lj} < d_{ij}} y_{lj} \leq 1.$$

Второе ограничение запрещает назначать для обслуживания потребителя более одного предприятия. Третье ограничение разрешает обслуживать последователю потребителя только в открытых последователем предприятиях. Четвертое ограничение, с одной стороны, запрещает открывать предприятия в уже местах, где расположено предприятие лидера, а с другой стороны, запрещает обслуживать потребителя в предприятиях, менее предпочтительных для данного потребителя, чем уже открытые лидером или последователем предприятия. Через $Y^*(\bar{u})$ обозначим множество оптимальных стратегий лидера, получаемых через решение сформулированной оптимизационной задачи.

Двухуровневая задача размещения предприятий (задача лидера) формулируется в виде

$$\max_{\bar{y} \in Y^*(\bar{u})} \Phi_{\alpha}(\bar{u}, \bar{y}) \rightarrow \min_{\bar{u}}$$

при ограничениях

$$u_i \in \{0,1\},$$

$$\sum_{i=1}^n u_{ij} = 1,$$

$$u_i \geq u_{ij},$$

$$u_i + \sum_{l:d_{lj}<d_{ij}} u_{lj} \leq 1.$$

Из второго ограничения следует, что лидер должен для обслуживания каждого потребителя назначить одно и только одно предприятие. Из третьего ограничения следует, что лидер может назначать для обслуживания потребителей только открытые предприятия. Четвёртое ограничение учитывает предпочтения потребителей, запрещая назначать для их обслуживания менее предпочтительные предприятия, чем уже открытые. Максимум в постановке задачи значит, что в случае нескольких оптимальных стратегий последователя лидер учитывает наилучшую для себя, что соответствует так называемой пессимистической постановке задачи двухуровневой оптимизации.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ

Исследуем случай гауссовского распределения случайной матрицы X . Пусть $M[X_{ij}] = \mu_{ij}$, $cov(X_{ij}, X_{kl}) = K_{ijkl}$.

Для того, чтобы найти квантиль $\Phi_\alpha(\bar{u}, \bar{y})$ функции потерь лидера, получим выражения для ее математического ожидания и дисперсии. Через χ_α обозначим квантиль уровня α стандартного нормального распределения. Введём обозначение

$$z_j(\bar{y}) = \left(1 - \sum_{i=1}^n y_{ij} \right)$$

Найдем математическое ожидание функции потерь лидера:

$$\begin{aligned}
E_L(\bar{u}, \bar{y}) &= M \left[\sum_{i=1}^n f_i u_i - \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n X_{ij} u_{ij} \right) z_j(\bar{y}) \right] \\
&= M \left[\sum_{i=1}^n f_i u_i \right] - M \left[\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n X_{ij} u_{ij} \right) z_j(\bar{y}) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n f_i u_i - \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n u_{ij} M[X_{ij}] \right) z_j(\bar{y}) \\
&= \sum_{i=1}^n f_i u_i - \sum_{j=1}^m z_j(\bar{y}) \left(\sum_{i=1}^n u_{ij} \mu_{ij} \right).
\end{aligned}$$

Найдем дисперсию функции потерь лидера:

$$\begin{aligned}
K_L(\bar{u}, \bar{y}) &= D \left[\sum_{i=1}^n f_i u_i - \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n X_{ij} u_{ij} \right) z_j(\bar{y}) \right] \\
&= D \left[\sum_{i=1}^n f_i u_i \right] + D \left[\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n X_{ij} z_j(\bar{y}) u_{ij} \right) \right] \\
&= \sum_{i \in I, j \in J, k \in I, l \in J} z_j(\bar{y}) z_l(\bar{y}) K_{ijkl} u_{ij} u_{kl}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$F(\bar{u}, \bar{y}, X) \sim \mathcal{N}(E_L(\bar{u}, \bar{y}), K_L(\bar{u}, \bar{y}))$$

Квантиль $\Phi_\alpha(\bar{u}, \bar{y})$ функции потерь лидера выражается через квантиль χ_α стандартного нормального распределения:

$$\Phi_\alpha(\bar{u}, \bar{y}) = \chi_\alpha \sqrt{K_L(\bar{u}, \bar{y})} + E_L(\bar{u}, \bar{y})$$

Теперь найдем квантиль $\varphi_\beta(\bar{u}, \bar{y})$ функции потерь последователя. Для этого запишем выражения для ее математического ожидания:

$$\begin{aligned}
E_F(\bar{y}) &= M \left[\sum_{i=1}^n f_i y_i - \sum_{j=1}^m \sum_i y_{ij} X_{ij} \right] = M \left[\sum_{i=1}^n f_i y_i \right] - M \left[\sum_{j=1}^m \sum_i y_{ij} X_{ij} \right] \\
&= \sum_{i=1}^n f_i y_i - \sum_{j=1}^m \sum_i y_{ij} M[X_{ij}] = \sum_{i=1}^n f_i y_i - \sum_{j=1}^m \sum_i y_{ij} \mu_{ij}
\end{aligned}$$

и дисперсии

$$\begin{aligned}
 K_F(\bar{y}) &= D \left[\sum_{i=1}^n f_i y_i - \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n X_{ij} y_{ij} \right) \right] = D \left[\sum_{i=1}^n f_i y_i \right] + D \left[\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n X_{ij} y_{ij} \right) \right] \\
 &= \sum_{i \in I, j \in J, k \in I, l \in J} K_{ijkl} y_{ij} y_{kl}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, можно записать $f(\bar{y}, X) \sim \mathcal{N}(E_F(\bar{y}), K_F(\bar{y}))$.

Квантиль $\varphi_\beta(\bar{u}, \bar{y})$ функции потерь последователя выражается через квантиль χ_β стандартного нормального распределения:

$$\varphi_\beta(\bar{u}, \bar{y}) = \chi_\beta \sqrt{K_L(\bar{y})} + E_L(\bar{y}).$$

4. ОПИСАНИЕ МЕТАЭВРИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Матрица назначения предприятий для обслуживания потребителей U строится единственным образом в зависимости от матрицы предпочтений D и вектора размещения предприятий u . Для того, чтобы найти матрицу U , из открытых предприятий лидера нужно выбрать наиболее предпочтительное для каждого из потребителей.

Оба метода используют окрестности вектора u

$$O_k(u) = \left\{ \tilde{u} \in \{0, 1\}^n : \sum_{i=1}^n |u_i - \tilde{u}_i| \leq k \right\}$$

для поиска/генерации нового вектора стратегий размещения предприятий. Параметр k показывает для векторов из данной окрестности максимальное количество элементов, отличающихся от элементов вектора u . Для использования предлагаемых методов необходимо для каждого задаваемого значения u находить точное решение задачи последователя. Это реализуется с помощью стандартных методов целочисленной оптимизации.

Метод имитации отжига

Суть метода заключается в том, что для некоторого начального решения, соответствующего вектору размещению предприятий u , выбирается новая стратегия u' из данной окрестности.

Если для новой стратегии u' значение оптимизируемой функции получается лучше, чем для u , то новая стратегия принимается за текущее решение. Если же решение получилось хуже, то оно принимается в качестве текущей стратегии с некоторой вероятностью. Тем самым, метод позволяет выходить из локальных минимумов и продолжать поиск глобальных минимумов. Процедура продолжается до стабилизации найденного решения.

Алгоритм

1. На входе параметр a имеет начальное значение, которое в процессе работы метода уменьшается. Так же задается нижняя граница данного параметра a_{min} .
2. Задается начальное произвольное состояние вектора u_0 .
3. $i = 1$.
4. Пока $a_i > a_{min}$
 - a. Генерируем новое состояние вектора u_c на основе предыдущего u_{i-1} , используя одну из окрестностей $O_1(u)$ или $O_2(u)$,
 - b. $\Delta\varphi = \varphi(u_c) - \varphi(u_{i-1})$
 - c. если $\Delta\varphi \leq 0$, то $u_i = u_c$
 - d. если $\Delta\varphi > 0$, то генерируется реализация равномерной случайной величины ξ на $(0,1)$
 - i. если $\xi < \exp\left(-\frac{\Delta\varphi}{t_i}\right)$, то $u_i = u_c$
 - ii. если $\xi \geq \exp\left(-\frac{\Delta\varphi}{t_i}\right)$, то $u_i = u_{i-1}$
 - e. $a_{i+1} = \lambda a_i$, где $0.9 \leq |\lambda| \leq 1$, $i = i + 1$, перейти к шагу (4).

Метод чередующихся окрестностей (VNS)

Данный метод осуществляет поиск оптимального решения путем перебора возможных решений с помощью окрестностей $O_k(u)$. Одна из окрестностей $O_1(u)$ используется для локального поиска. Сначала осуществляется локальный поиск в окрестности $O_1(u)$ некоторого начального решения u . Если удастся найти стратегию лучше исходной, то итерации начинаются сначала и продолжаются до тех пор, пока не будет найдено новое улучшенное решение. После этого увеличивается мощность окрестности k , которая показывает, сколько элементов вектора стратегии u , будет изменено. Получает новое значение и проводит локальный поиск.

Если было найдено значение лучше, то мощность понижается до единицы и все начинается сначала. Если хуже, то мощность увеличивается до заданной или до размерности вектора стратегии. Тем самым гарантируется, что будет найдено приближенное значение близкое или равное точному.

Алгоритм.

1. Выбрать окрестность $O_1(u)$ и начальное значение вектора стратегии.
2. Повторять, пока не выполнен критерий остановки.
 - 2.1. $k = 1$
 - 2.2. Повторять, пока $k \leq k_{max}$. Если не выполнено, то переходим к пункту (2).

- 2.2.1. Случайно выбрать вектор стратегий из допустимого множества после применения поиска по $O_k(u)$
- 2.2.2. Применить локальный поиск к выбранной стратегии и получить локальный оптимум.
- 2.2.3. Если значение функции улучшилось, то проводим заново локальный поиск, если нет, то увеличиваем мощность окрестности. Переходим к пункту (2.2.).

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

На примере задачи конкурентного размещения электростанций проведен численный эксперимент, в котором лидер и последователь размещают электростанции в $n = 7$ местах. Лидер и последователь поочередно размещают свои предприятия, основываясь на полученной прибыли от потребления электроэнергии потребителями, $m = 100$. Лидер и последователь учитывают наилучшие комбинации размещения друг друга, расставляя свои электростанции. Так же и лидеру, и последователю известны предпочтения потребителей по каждому из мест для размещения электростанций.

При решении задачи методом имитации отжига были получены графики изменения квантили функции потерь, представленные на рис.1.

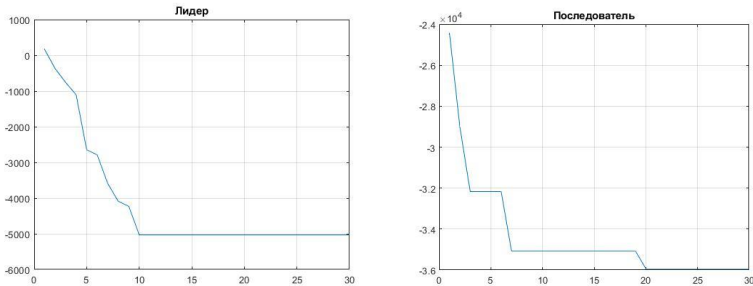


Рис. 1. Применение метода имитации отжига

В результате решения задачи найдены стратегия лидера: $u = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$ и стратегия последователя: $y = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$.

При решении задачи методом поиска с чередующимися окрестностями получены графики изменения квантили функции потерь, представленные на рис. 2.

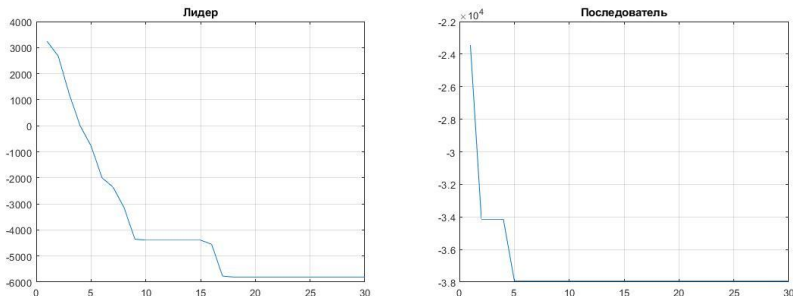


Рис. 2. Применение метода поиска с чередующимися окрестностями.

В результате решения найдена стратегия лидера $u = (1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)$ и стратегия последователя $y = (0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)$.

Таким образом, видно, что с помощью поиска с чередующимися окрестностями в данном примере удалось найти решение с меньшим значением минимизируемой функции, чем при применении метода имитации отжига. Это обусловлено тем, что метод поиска с чередующимися окрестностями, в отличие от метода имитации отжига, использует окрестности, в которых могут меняться более двух элементов вектора размещений.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе сформулирована новая стохастическая задача размещения предприятий, в которой ни лидеру, ни последователю не известны реализации случайных параметров задачи. Для случая гауссовского распределения случайных параметров задача сведена к детерминированной двухуровневой задаче, для решения которой адаптированы два метаэвристических метода: метод имитации отжига и метод поиска с чередующимися окрестностями. Для рассмотренного численного примера метод поиска с чередующимися окрестностями позволил найти решение с меньшим значением оптимизируемой функции.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 17-07-00203А.

ЛИТЕРАТУРА

1. Береснев В.Л., Мельников А.А. Приближенные алгоритмы для задачи конкурентного размещения предприятий // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17. №6. С. 3-10.
2. Иванов С.В. Морозова М.В. Стохастическая задача конкурентного размещения предприятий с квантильным критерием // АиТ. 2016. № 3. С. 109-122.
3. Кибзун А.И., Кан Ю.С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
4. Bard J.F. Practical Bilevel Optimization: Algorithms and Applications. // Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.
5. Dempe S, Kalashnikov V, Pérez-Valdés GA, Kalashnykova N. Bilevel Programming Problems - Theory, Algorithms and Applications to Energy Network. // Springer Verlag: Berlin, Heidelberg, 2015.
6. Melnikov A., Beresnev V. Upper Bound for the Competitive Facility Location Problem with Quantile Criterion // Lecture Notes in Computer Science. 2016. V. 9869. P. 373-387.
7. Snyder L.V. Facility location under uncertainty: a review // IE Transact. 2006. V. 38. No. 7. P. 547-564.

Работа поступила 20.02.2019г.

КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 159.93

АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ РАСЧЕТОВ ВОЗДЕЙСТВИЯ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА НА КОСМИЧЕСКИЕ АППАРАТЫ

В.С. Асатурьян, Д.И. Григорьев, Э.Р. Юмагулов

В статье приводится описание аппаратно-программного комплекса "Риск-удар", предназначенного для комплексной оценки рисков, обусловленных воздействием частиц космического мусора и метеороидов на космические аппараты.

The article provides a description of the «Risk-udar» hardware-software complex intended for a comprehensive assessment of the risks caused by the effects of particles of space debris and meteoroids on spacecraft.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Космические аппараты, космический мусор, пробой, вероятность, оценка рисков, вероятность непробоя.

ДЛЯ ЦИТАТЫ

В.С. Асатурьян, Д.И. Григорьев, Э.Р. Юмагулов. Алгоритм реализации расчетов воздействия космического мусора на космические аппараты // Моделирование и анализ данных. 2019. №2. С.109-114.

V.S. Asaturjan, D.I. Grigorev, E.R. Jumagulov. Algorithm for calculating the effects of space debris on spacecraft. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis (Russia). 2019, no.2, pp.109-114.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из результатов космической деятельности стало накопление в околоземном пространстве осколков отработавших ракет-носителей и космических аппаратов (космический мусор). Основным показателем стойкости конструкций является вероятность непробоя (ВНП) их оболочек в течение заданного времени нахождения на орбите. Этот показатель определяется статистикой распределения частиц в пространстве по размерам и скоростям, параметрами орбиты и ориентацией космических аппаратов (КА) по отношению к потокам частиц, характеристикой защищённости стенок конструкции - баллистической предельной зависимостью (БПЗ) - зависимостью минимального размера частицы, пробивающей защищаемую стенку конструкции, от скорости и от угла соударения. Комплекс вопросов, связанных с определением условий соударения частиц с КА, прочностью конструкции при высокоскоростном ударе, прогнозированием вероятности сохранения герметичности и работоспособности аппарата, в течение ряда лет был предметом исследований; часть из них, непосредственно свя-

званная с предметом данной статьи, изложена в работах [6-13]. На их основе созданы методики расчета, охватывающие все стороны проблемы. Их программная реализация аппаратно-программный комплекс (АПК) «Риск-удар». Ниже излагаются структура комплекса, используемые программные инструменты и возможности для практического применения.

2. КЛАССЫ РЕШАЕМЫХ ЗАДАЧ

Программный комплекс «Риск-Удар» предназначен для инженерных расчётов вероятностных характеристик взаимодействия КА с метеороидной и техногенной средой космического мусора, в том числе для разработки экранной защиты КА. Программа позволяет решать следующие задачи: математическое моделирование 3D-объекта сложной формы (КА), формирование раstra изображения 3D-объекта с заданного направления и реализация трассировки траекторий частиц; расчёт потока частиц на отдельные элементы поверхности КА в соответствии выбранной моделью метеороидной или техногенной среды, расчет физических процессов воздействия высокоскоростных ударов осколков космического мусора и определение баллистических предельных зависимостей, расчёт вероятности пробоя и катастрофических последствий пробоя гермооболочки; организация надежного, простого и удобного интерфейса (способов взаимодействия пользователя и системы) подготовки и ввода исходных данных для расчёта.

3. НАЗНАЧЕНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА

Программа реализует алгоритмы комплекса расчётов, в результате которых определяются:

- геометрические параметры 3D-модели объекта (КА);
- плотность потока частиц в системе координат движущегося КА и распределение частиц по скорости соударения и по углам подхода к объекту в соответствии с существующими моделями среды космического мусора и естественных метеороидов;
- прочностные (противоударные) характеристики элементов конструкции объекта - баллистические предельные зависимости (БПЗ);
- вероятность непробоя КА в течение заданного времени пребывания на орбите.

Результаты работы программы размещаются в базе данных (БД), в текстовом файле в стандартной форме, а также в виде изображения рассчитываемого объекта на экране монитора, раскрашенного в соответствии с распределением риска пробоя единицы площади поверхности объекта.

4. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Исходными являются данные, присущие любому типу конструкции и защищаемого КА и экранной защиты,

- скорость и угол столкновения,
- плотность материала ударяющейся частицы,
- механические параметры защищаемой конструкции (гермооболочки КА);
- механические параметры защитных экранов,
- расстояние между экраном и защищаемой стенкой для двустенной преграды;
- критерии критического повреждения защищаемой стенки (пробой, недопустимое кратерообразование, откол на задней стороне стенки) и т.д.

Результаты работы блока расчёта БПЗ размещаются в соответствующих таблицах БД, которые являются входными данными для блока расчёта вероятности непробоя.

5. СТРУКТУРА АПК

Структурно АПК состоит из двух самостоятельных программных блоков: блока расчёта ВПП и блока расчёта БПЗ.

Блок расчёта БПЗ, предназначенный для расчёта ударной стойкости конструкции КА с защитными экранами и подготовки исходных данных для блока расчёта вероятности не-пробоя, состоит из следующих основных программных модулей:

- Модуль *Dictionary* предназначен для хранения и управления всей справочной информацией по модулям КА, характеристикам защитных конструкций, свойствам материалов;
- Модуль *Calculation* реализует расчёт баллистических предельных зависимостей и предназначен для выполнения последовательности шагов:
 1. Расчет БПЗ в низкоскоростном диапазоне;
 2. Расчет пробивания частицей лицевого экрана в низкоскоростном диапазоне;
 3. Расчет пробивания частицей промежуточного экрана;
 4. Расчет ударного воздействия деформированной частицы на защищаемую стенку и определение баллистического предела;
 5. Расчет БПЗ в среднескоростном диапазоне.
 6. Расчет БПЗ в высокоскоростном диапазоне.
 7. Расчет пробивания частицей лицевого экрана;
 8. Расчет параметров «лидирующего (максимального) осколка» частицы;
 9. Расчет пробивания «лидирующим осколком» промежуточного экрана;
 10. Расчет ударного воздействия «лидирующего осколка» на защищаемую стенку и определение баллистического предела;
 11. Расчет параметров облака вторичных частиц (продуктов разрушения частицы и лицевого экрана);
 12. Расчет пробивания облаком промежуточного экрана;
 13. Расчет воздействия облака на защищаемую стенку и определение баллистического предела;
- Модуль *Test* предназначен для подготовки новых типов защитной конструкции и их тестирования. Модуль оснащён 3D конструктором и обладает следующим функционалом:
 1. возможность создание новой защитной конструкции из заранее подготовленных шаблонов экранов;
 2. возможность создания новой защитной конструкции из уже существующих защитных конструкций, создание *по - образцу*;
 3. присваивание характеристик элементам конструкций и сохранение их в специальной библиотеке, с возможностью дальнейшего переноса в БД.
- Модуль *Master* предназначен для подготовки новых проектов, которыми могут быть новые космические аппараты, новые защитные конструкции и новые алгоритмы расчёта. Модуль представляет собой пошаговую инструкцию для пользователя, где за 8 шагов пользователь размещает подготовленную заранее защитную конструкцию в БД защитных конструкций для последующего расчёта БПЗ.
- Модуль *Report* предназначен для подготовки отчётов по результатам расчётов БПЗ и конвертирования их в различные популярные форматы. Помимо встроенных шаблонов печати, пользователь имеет возможность создания свои собственных отчётов.
- Модуль *Experiment* служит для хранения результатов экспериментов и документов;
- Подсистема хранения информации. Реализована на двух файлах базы данных, связанных друг с другом с помощью встроенного в базу данных механизма «связан-

ных таблиц». Не имеет собственного интерфейса в программе. Подсистема может быть размещена на любой СУБД, где есть соответствующие ODBC- драйверы.

Блок расчёта ВНП состоит из следующих основных программных модулей:

- модуль декомпозиции трехмерного объекта сложной формы. Предназначен для преобразования поверхности сложной формы в набор фрагментов поверхностей, описываемых 3D-примитивами.;
- модуль реализации трассировки лучей (траекторий частиц) решает две основных задачи:
 1. Определение координат встречи трассирующего «луча» (траектории частицы) с поверхностью заданной формы. При этом, если поверхность является невыпуклой, многосвязной и т.п. последовательно определяются координаты пересечения луча с фрагментами поверхности на всем пути «луча», и далее из всего полученного массива координат всех возможных точек встречи выбирается ближайшая к центру проецирования. Таким образом, автоматически решается задача возможного затенения фрагментов поверхностей;
 2. Определение параметров взаимодействия «луча» с поверхностью КА в идентифицированной точке встречи (условий соударения).
- Модуль расчета вероятностных характеристик взаимодействия частиц среды с трехмерным объектом. Модуль решает следующие задачи:
 1. расчёт вероятности пробоя гермооболочки КА при заданных параметрах экранной защиты отдельных элементов конструкции КА;
 2. оценку вероятности катастрофических последствий пробоя гермооболочки пилотируемой космической станции частицей.

Модули программного комплекса, были собраны в одно приложение. Приложение представляет собой Windows форму (рис.1) на которой расположены элементы пользовательского интерфейса, вызывающие отдельные модули и помещающие их в элементе Panel главного окна приложения. Вызов и расположение окон модулей в окне основной формы выполняется с использованием WinAPI.

Отдельного следует сказать об особенностях работы с окнами, содержащими MenuStrip элементы. Реализация microsoft технологии помещения дочерних окон модулей в материнское окно с панелью «Panel» (MDI) не позволяет обращаться к элементам MenuStrip дочернего окна. Для решения этой проблемы использовался принцип построения окон в операционной системе windows, заключающийся в том, что все элементы окна сами являются окнами. Для получения указателя (handle) MenuStrip окна модуля написан класс, реализующий построение рекурсивного дерева всех запущенных процессов системы. На главной форме была создана отдельная панель, которой присваивалось значение найденного указателя.

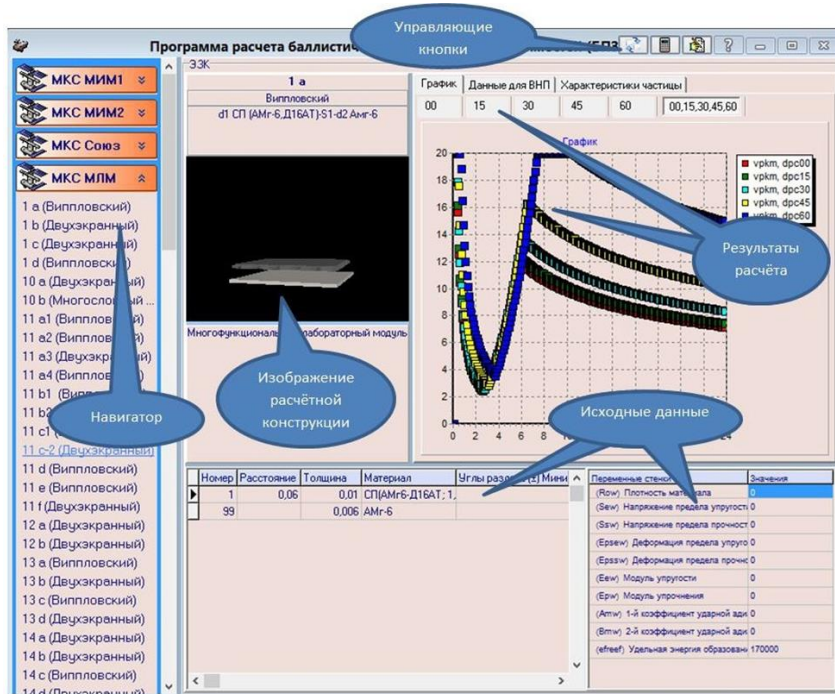


Рис. 1 Интерфейс программной оболочки

6. ВЫБОР ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ АПК

Программа имеет файл-серверную архитектуру, где в качестве базы данных используется СУБД Microsoft Access 2003 состоящих из двух «*.db» файлов. Блок расчета ВВП написан на языке программирования C# в среде разработки Microsoft Visual Studio 2008. Блок расчета БПЗ написан на языке программирования Delphi в среде разработки Delphi 7.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые разработано отечественное программно-математическое обеспечение для комплексной оценки рисков, обусловленных воздействием техногенного космического мусора на КА. Данное программно-математическое обеспечение может быть использовано для оценки надежности функционирования КА, а также при создании перспективных космических орбитальных комплексов.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ 25645.128-85 Вещество метеорное. Модель пространственного распределения, 1985 г.
2. ГОСТ РВ 25645.164-97 Условия воздействия метеорно-техногенных тел на конструкцию космического аппарата, 1997 г.
3. ГОСТ 134-1031-2003 «Общие требования по защите космических средств от механического воздействия частиц естественного и техногенного происхождения», 2003 г.
4. ГОСТ Р 25645.167-2005 Космическая среда (естественная и искусственная). Модель пространственно-временного распределения плотности потоков техногенного вещества в космическом пространстве, 2005 г.
5. ГОСТ Р 52925-2008 Изделия космической техники. Общие требования к космическим средствам по ограничению техногенного засорения околоземного космического пространства, 2008 г.
6. Буслев Е.П. Аппроксимация диаметров отверстий, пробиваемых высокоскоростными сферическими частицами в тонких мишенях. Тезисы докладов научных чтений, посвященных 90-летию со дня рождения Юрия Александровича Можжорина - г. Королев. М.о. ЦНИИмаш, 2010, с. 118-120.
7. Балакирев Ю.Г., Бужинский В.А., Буслев Е.П., Буяков И.А., Быков Д.Л. и другие. Методологические основы научных исследований при обосновании направлений космической деятельности, облика перспективных космических комплексов и систем их научно-технического сопровождения. Т. 5 Методология отработки прочности и динамики ракетносителей и космических аппаратов. М.: "Изд.-торг. корпорация "Дашков и К", 2016. 376с.
8. Буслев Е.П. Старцев В.Г. Судомоев А.Д. Забиров И.Х. Прочность конструкций при ударных воздействиях. Космонавтика и ракетостроение, № 13, ЦНИИмаш. 1998.
9. Забиров И.Х. Старцев В.Г. Судомоев А.Д. Исследования ударной прочности ракетных конструкций. научно-техн. журн.: "Космонавтика и ракетостроение", вып. 4, ЦНИИмаш, 1995.
10. Абашкин Б.И. Буслев Е.П. Семенов В.И. Судомоев А.Д. Устинов В.В. Защита космических аппаратов от метеороидов и осколков космического мусора. Результаты и перспективы. Тезисы докладов XXXIII Всероссийской конф. по проблемам науки и технологий. Миасс. 2013 г.
11. Воробьев Ю.А. Магжанов Р.М. Семенов В.И. Устинов В.В., Чернявский А.Г. Влияние высокоскоростных ударов метеороидов и частиц космического мусора на прочность и ресурс иллюминаторов модулей МКС. "Космическая техника и технология". Изд. РКК "Энергия" №8, 2014
12. Буслев Е.П. Лоцманов А.В. Онучин Е.С. Баллистический предел стенки гермоотсека космического аппарата с защитным экраном в высокоскоростном диапазоне соударения с частицей. "Космонавтика и ракетостроение" вып.3 (96), ЦНИИмаш, 2017. С 74-80.
13. Буслев Е.П. Голденко Н.А. Защита перспективных трансформируемых модулей орбитальных станций от ударов метеороидов и частиц космического мусора. "Механика и математическое моделирование в технике". Всероссийская научно-техн. конф., посв. 100-летию В.И. Феодосьева. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2016

Работа поступила 20.02.2019г.

АВТОРЫ

Азанов Валентин Михайлович	аспирант, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия azanov59@gmail.com
Архипов Александр Сергеевич	студент магистратуры, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия. ege3145@yandex.ru
Асатурьян Владимир Сергеевич	ведущий инженер, Центр прочности ФГУП ЦНИИмаш, Королев, Россия. asaturyanvs@tsniimash.ru
Горбунов Никита Георгиевич	студент магистратуры, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия. nik9595@list.ru
Горобцова Алла Борисовна	студент магистратуры, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия. alla.gorobtsova@yandex.ru
Григорьев Дмитрий Ильич	студент магистратуры, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия. rockfor440@gmail.com
Захаров Валерий Константинович	доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, автор научных публикаций по концептуальным и математическим моделям государства и его учреждений, лауреат Ломоносовской премии. zakharov_valeriy@list.ru
Захаров Вадим Олегович	студент магистратуры, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия. WadimZaharoff@yandex.ru
Ибрагимов Данис Наилевич	кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия. rikk.dan@gmail.com
Иванова Юлия Сергеевна	студент магистратуры, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). ivanova.ju7552@mail.ru

Иванов Сергей Валерьевич	кандидат физико-математических наук, доцент, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия. sergeyivanov89@mail.ru
Кан Юрий Сергеевич	доктор физико-математических наук, профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия. yu_kan@mail.ru
Кускова Елена Александровна	студент магистратуры, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия. lena-kus@yandex.ru
Осокин Андрей Владимирович	старший преподаватель, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия, aw.osokin@gmail.com
Пономаренко Андрей Николаевич	студент магистратуры, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия. Pinokio.1995@mail.ru
Порцева Екатерина Юрьевна	студент магистратуры, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия portsec@gmail.ru
Семенihin Константин Владимирович	доктор физико-математических наук, профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия. siemenkv@mail.ru
Тарасов Андрей Николаевич	студент магистратуры, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия. tarrapid@gmail.com
Юмагулов Эдуард Радикович	младший научный сотрудник, Центр прочности ФГУП ЦНИИмаш, Королев, Россия. JumagulovJeR@tsniimash.ru

Моделирование и анализ данных

Научный журнал, 2019, № 2

Подписано в печать: 15.04.2019.
Формат: 60*⁹⁰/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Печать цифровая.
Усл. печ. п. 7,3. Усл.-изд. л. 7,9.
Тираж 500 экз.