Моделирование и анализ данных
2024. Том 14. № 1. С. 135–154
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2024140109
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)
© 2024 ФГБОУ ВО МГППУ
Modelling and Data Analysis
2024. Vol. 14, no. 1, pp. 135–154
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2024140109
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)
© 2024 Moscow State University of Psychology & Education

УДК 519.853, 517.977.58

Приближенный синтез оптимальных детерминированных систем управления с неполной обратной связью на основе достаточных условий ε-оптимальности

Пантелеев А.В.*
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2493-3617
e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Каранэ М.М.С.**
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8019-8613
e-mail: mm_karane@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления детерминированными динамическими системами в условиях отсутствия информации о части координат вектора состояния. Сформулированы и доказаны достаточные условия ε-оптимальности на основе принципа расширения. Предложен алгоритм нахождения априорной оценки близости синтезированного закона управления с неполной обратной связью к оптимальному на заданном множестве начальных состояний. Приведено решение модельного примера.

Ключевые слова: достаточные условия оптимальности, оптимальная синтезирующая функция, мультиагентный алгоритм, вычисление априорной оценки.

Для цитаты:
Пантелеев А.В., Каранэ М.М.С. Приближенный синтез оптимальных детерминированных систем управления с неполной обратной связью на основе достаточных условий ε-оптимальности // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 135–154. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2024140109

***Пантелеев Андрей Владимирович,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика» Московского авиационного института (Национального исследовательского университета), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2493-3617, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

*****Каранэ Мария Магдалина Сергеевна,*** аспирант кафедры математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика» Московского авиационного института (Национального исследовательского университета), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8019-8613, e-mail: mm_karane@mail.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Решение задач оптимального управления детерминированными системами, поведение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, как правило, связано с нахождением программного управления или управления с полной обратной связью по вектору состояния. Методы поиска программного управления связаны с применением принципа максимума Л.С. Понтрягина и численных методов решения двухточечных краевых задач, применением итерационных процедур на основе использования первой и второй вариации функционала, с нахождением наилучших параметров разложений по элементам базисных систем при помощи методов оптимизации [1–8]. Поиск оптимального управления с полной обратной связью связан с определением решений уравнения Беллмана [9–14]. Отдельно следует выделить группу численных методов, основанных на применении принципа расширения и достаточных условий оптимальности [9–13]. Методы решения задач синтеза управления с неполной обратной связью, когда информация обо всех координатах вектора состояния недоступна, еще недостаточно развиты. В [15] приведены достаточные условия оптимальности управления с неполной обратной связью и соотношения для его определения. В данной статье предлагается численный алгоритм решения, основанный на применении ортогональных разложений [8], априорных оценок близости найденного алгоритма управления к оптимальному и мультиагентных алгоритмов глобальной оптимизации. Сформулированы и доказаны достаточные условия ε-оптимальности искомого управления, получена формула для вычисления априорной оценки. Данная работа развивает исследования применимости таких оценок, начатые в работах [9–12] и продолженные в [16, 17].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть поведение модели объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \qquad (1)$$

где x – вектор состояния системы, $x = (x^1, x^2)^T \in R^n$, $x^1 = (x_1, ..., x_m)^T$, $x^2 = (x_{m+1}, ..., x_n)^T$, $0 \le m \le n$ (предположим, что о компонентах вектора $x^1 \in R^m$ известна текущая информация, а о компонентах вектора $x^2 \in R^{n-m}$ она отсутствует);

u – вектор управления, $u \in U \subseteq R^q$, U – некоторое заданное множество; t – время, $t \in T' = \left[t_0, t_f\right] = T \bigcup \{t_0\} \bigcup \{t_f\}$, T' – промежуток времени функционирования системы, моменты времени t_0 и t_f заданы, $T = (t_0, t_f)$; внешние воздействия на объект управления отсутствуют, $f(t,x,u): T' \times R^n \times U \to R^n$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Обозначим: $B = R^n, B_1 = R^m, B_2 = R^{n-m}$; $Q = (t_0, t_f) \times R^n$, $Q' = \left[t_0, t_f\right] \times R^n$.

Начальные условия $x(t_0) = x_0$ заданы множеством $\Omega \subseteq R^n$, размерность которого равна m, т.е.

$$x(t_0) \in \Omega = \left\{ x \,\middle|\, x^2 = y_0(x^1),\ x^1 \in R^m = B_1 \right\}, \tag{2}$$

где $y_{0j}(x^1)$, $j = m+1, \ldots, n,$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции. При $m = 0$ множество Ω является точкой, а при $m = n$ совпадает с множеством R^n. Условия на вектор состояния на правом конце промежутка времени T' не заданы.

Предполагается, что при управлении используется информация только о времени t и о компонентах вектора x^1, т.е. управление $u(t)$, применяемое в каждый момент времени $t \in T'$, имеет вид управления $u(t) = \boldsymbol{u}(t, x^1(t))$ с неполной обратной связью по вектору состояния (рис. 1).

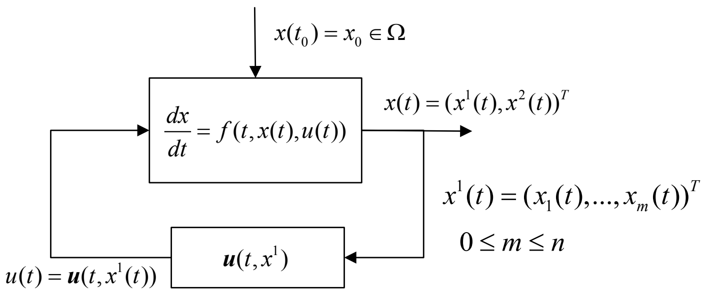

Рис. 1

Множество допустимых управлений $\boldsymbol{U}_m$ с неполной обратной связью образуют функции $\boldsymbol{u}(t, x^1)$: $T' \times B_1 \to U$ такие, что функции $f_i(t, x, \boldsymbol{u}(t, x^1))$, $i = 1, \ldots, n,$ определены на Q', непрерывны вместе с частными производными по x, кусочно-непрерывны по t. При этом управление $u(t) = \boldsymbol{u}(t, x^1(t))$ кусочно-непрерывно по t, а в точках разрыва значение управления определяется как предел справа.

Определим множество допустимых элементов $\boldsymbol{D}(t_0, x_0)$ как множество пар $d = (x(t), u(t))$, удовлетворяющих уравнению (1) с начальным условием (2) почти всюду на T', где $\forall t \in T'$ $x(t) \in R^n, u(t) \in U$, функции $x(t)$ непрерывны и кусочно-дифференцируемы, а $u(t)$ кусочно-непрерывны.

На множестве $\boldsymbol{D}(t_0, x_0)$ определим функционал качества управления

$$I\left(d\right) = \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t))\, dt + F(x(t_f)), \tag{3}$$

где $f^0(t,x,u)\,, F(x)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Требуется найти такую функцию $\boldsymbol{u}^*(t,x^1) \in \boldsymbol{U}_m$, что

$$I(d^*) = \min_{d \in \boldsymbol{D}(t_0,x_0)} I(d) \quad \forall x_0 \in \Omega\,, \tag{4}$$

где $d^* = (x^*(t), u^*(t) = \boldsymbol{u}^*(t, x^{1*}(t)))$.

Функция $\boldsymbol{u}^*(t,x^1) \in \boldsymbol{U}_m$ называется оптимальной синтезирующей функцией на множестве Ω. Для каждого начального условия из множества Ω она порождает оптимальную пару, т.е. оптимальную траекторию $x^*(t)$ и оптимальное программное управление $u^*(t)$. Предполагается, что минимум в (4) и функция $\boldsymbol{u}^*(t,x^1)$ существуют.

Подчеркнем, что число используемых в управлении координат вектора состояния совпадает с размерностью множества начальных состояний Ω . При $m=0$ множество Ω является точкой x_0, для которой ищется оптимальное программное управление $u^*(t)$, а при $m=n$ множество Ω совпадает с n-мерным евклидовым пространством и ищется оптимальное управление с полной обратной связью по вектору состояния $\boldsymbol{u}^*(t,x)$.

Рассмотрим проблему поиска приближенного решения задачи (4).

Требуется найти такую функцию $\boldsymbol{u}^\varepsilon(t,x^1) \in \boldsymbol{U}_m$, что

$$\left| I(d^\varepsilon) - I(d^*) \right| \le \varepsilon \quad \forall x_0 \in \Omega\,, \tag{5}$$

где $d^* = (x^*(t), u^*(t) = \boldsymbol{u}^*(t,x^{1*}(t)))$, $d^\varepsilon = (x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t) = \boldsymbol{u}^\varepsilon(t,x^{1\varepsilon}(t)))$, $I(d^*) = \min\limits_{d \in \boldsymbol{D}(t_0,x_0)} I(d)$, $\varepsilon-$ малое положительное число. Функция $\boldsymbol{u}^\varepsilon(t,x^1)$ называется $\boldsymbol{\varepsilon}-$оптимальной синтезирующей функцией на множестве Ω .

3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ε–ОПТИМАЛЬНОСТИ

Поведение траекторий уравнения (1), исходящих из множества Ω , предлагается описывать с помощью вектор-функции $y(t,x^1): T' \times B_1 \to B_2$, удовлетворяющей системе уравнений:

$$\frac{\partial y_j(t,x^1)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y_j(t,x^1)}{\partial x_i} f_i(t,x^1,y(t,x^1),\boldsymbol{u}(t,x^1)) + f_j(t,x^1,y(t,x^1),\boldsymbol{u}(t,x^1)), \tag{6}$$

$$y_j(t_0,x^1) = y_{0j}(x^1), \tag{7}$$

где $j = m+1,\dots,n.$

Уравнениями характеристик этой системы являются уравнения для координат вектора состояния, образующие (1):

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t,x^1(t),y(t),\boldsymbol{u}(t,x^1(t))),\ \ i=1,\dots,m, \quad x^1(t_0) = x_0^1 \in B_1,$$

$$\dot{y}_j(t) = f_j(t,x^1(t),y(t),\boldsymbol{u}(t,x^1(t))),\ \ j=m+1,\dots,n, \quad y(t_0) = y_0(x_0^1).$$

Решение системы (6),(7) устанавливает связь: $x^2 = y(t, x^1) \quad \forall (t, x^1) \in T' \times B_1$. Предполагается, что размерность множества, описываемого соотношением $x^2 = y(t, x^1)$, равна $m \quad \forall t \in T'$. Для получения траекторий, исходящих из множества Ω, требуется решить систему (6),(7) при известном управлении $\boldsymbol{u}(t, x^1)$, а затем систему

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x^1(t), y(t, x^1(t)), \boldsymbol{u}(t, x^1(t))), \quad i = 1, \ldots, m, \quad \forall x^1(t_0) = x_0^1 \in B_1,$$

Если значения координат вектора $x^1(t)$ в момент $t \in T'$ известны, то можно найти значения координат вектора состояния x: $x(t) = \left(x^1(t), x^2(t) = y(t, x^1(t)) \right)^T$.

Пусть известны управления $\boldsymbol{u}^*(t, x^1)$ и $\boldsymbol{u}^\varepsilon(t, x^1)$, удовлетворяющие условиям (4) и (5) соответственно. Тогда для произвольного заданного начального состояния $x_0 \in \Omega$ с помощью описанной процедуры (при замене $\boldsymbol{u}(t, x^1)$ на $\boldsymbol{u}^*(t, x^1)$ и $\boldsymbol{u}^\varepsilon(t, x^1)$) могут быть найдены пары

$$d^* = (x^*(t), u^*(t) = \boldsymbol{u}^*(t, x^{1*}(t)) \in \boldsymbol{D}(t_0, x_0),$$

$$d^\varepsilon = (x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t) = \boldsymbol{u}^\varepsilon(t, x^{1\varepsilon}(t)) \in \boldsymbol{D}(t_0, x_0).$$

Введем в рассмотрение множество функций $\varphi(t, x) : T' \times B \to R,$ непрерывно дифференцируемых всюду, за исключением конечного числа сечений $T' \times B$ при фиксированных t, и конструкции [9–11]:

$$R(t, x, u) = \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} \cdot f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u), \tag{8}$$

$$G(t_f, x) = \varphi(t_f, x) + F(x).$$

Приведем сначала формулировку известных достаточных условий оптимальности.

Предположим, что существует множество Φ функций $\varphi(t, x)$, для которых конструкции (8) достигают экстремальных значений:

$$r(t) = \max_{x^2 \in B_2} \max_{u \in U} R(t, x, u) \quad \forall (t, x^1) \in T \times B_1, \tag{9}$$

$$g = \min_{x^2 \in B_2} G(t_f, x) \quad \forall x^1 \in B_1, \tag{10}$$

где $r(t)$ – кусочно-непрерывная функция на множестве T.

Пусть имеются управление $\boldsymbol{u}^*(t, x^1) \in \boldsymbol{U}_m$ и соответствующее решение $y^*(t, x^1)$ системы (6), (7).

Теорема 1 (достаточные условия оптимальности в задаче (4) [15]). *Если существует такая функция* $\varphi(t, x) \in \Phi$, *что*:
1) $R(t, x^1, y^*(t, x^1), \boldsymbol{u}^*(t, x^1)) = r(t)$ *почти всюду на* T, $\quad \forall x^1 \in B_1$;
2) $G(t_f, x^1, y^*(t_f, x^1)) = g \quad \forall x^1 \in B_1$,
то управление $\boldsymbol{u}^*(t, x^1)$ *является оптимальной синтезирующей функцией на множестве* Ω.

Функцию $r(t)$ *и величину* g *можно без ограничения общности положить равными нулю. Тогда минимальное значение функционала определяется формулой*

$$\min_{d \in \boldsymbol{D}(t_0, x_0)} I(d) = -\varphi(t_0, x_0) \quad \forall x_0 \in \Omega . \tag{11}$$

Пусть имеются управление $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(t, x^1) \in \boldsymbol{U}_m$ и соответствующее решение $y^{\varepsilon}(t, x^1)$ системы (6), (7).

Теорема 2 (достаточные условия ε-оптимальности в задаче (5)). *Если существует такая функция* $\varphi(t,x) \in \Phi$ *, малое положительное число* ε_2 и функция $\varepsilon_1(t)$ *, принимающая для всех* $t \in T$ *малые положительные значения, что*:

1) $\left| r(t) - R(t, x^1, y^{\varepsilon}(t, x^1), \boldsymbol{u}^{\varepsilon}(t, x^1)) \right| \le \varepsilon_1(t) \qquad \forall (t, x^1) \in T \times B_1$;

2) $\left| G(t_f, x^1, y^{\varepsilon}(t_f, x^1)) - g \right| \le \varepsilon_2 \quad \forall x^1 \in B_1$,

то управление $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(t, x^1)$ *является* ε*-оптимальной синтезирующей функцией на множестве* Ω при $\varepsilon = \int\limits_{t_0}^{t_f} \varepsilon_1(t) dt + \varepsilon_2$.

Если $\varepsilon_1(t) \equiv 0, \varepsilon_2 = 0$, управление $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(t, x^1)$ является оптимальной синтезирующей функцией на множестве Ω .

Доказательство. Применим принцип расширения с заданием множества V и поиском удачного доопределения функционала I на этом множестве [9–11].

Определим множество V пар $d = (x(t), u(t))$, где элементы пар по сравнению с входящими в $\boldsymbol{D}(t_0, x_0)$ необязательно связаны дифференциальным уравнением (1); $x\left(t_0\right) = x_0 \in \Omega$; допускаются разрывы первого рода функций $x(t)$ на множестве T' . Таким образом, множество $\boldsymbol{D}(t_0, x_0) \subset V$ – расширение построено.

Доопределение функционала I на множестве V производится с помощью задания функции $\varphi(t, x)$.

На множестве V определим функционал

$$L(d) = G(t_f, x(t_f)) - \int\limits_{t_0}^{t_f} R(t, x(t), u(t))\, dt - \varphi(t_0, x_0) .$$

На множестве $\boldsymbol{D}(t_0, x_0) \subset V$, где между функциями $x(t)$ и $u(t)$ существует дифференциальная связь (1), с учетом (8) и равенства $x(t_0) = x_0$ справедливо

$$R(t, x(t), u(t)) = \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial x_i} f_i(t, x(t), u(t)) - f^0(t, x(t), u(t)) =$$

$$= \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial x_i} \dot{x}_i(t) - f^0(t, x(t), u(t)) = \frac{d\, \varphi(t, x(t))}{d\, t} - f^0(t, x(t), u(t))$$

и поэтому

$$L(d)=\varphi(t_f,x(t_f))+F(x(t_f))-\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{d\,\varphi(t,x(t))}{d\,t}-f^0(t,x(t),u(t))\right]dt-\varphi(t_0,x_0)=$$

$$=\varphi(t_f,x(t_f))+F(x(t_f))-\left[\varphi(t_f,x(t_f))-\varphi(t_0,x_0)\right]+\int_{t_0}^{t_f}f^0(t,x(t),u(t))\,dt-\varphi(t_0,x_0)=I(d).$$

Таким образом, на множестве V функционалы $I(d)$ и $L(d)$ совпадают. Поведение функционала $L(d)$ на множестве $V\setminus\boldsymbol{D}$ полностью определяется выбором функции $\varphi(t,x)$.

Пусть имеется функция $\varphi(t,x)\in\Phi$. Найдем минимум функционала $L(d)$ на множестве V. Его третий член при заданной функции $\varphi(t,x)$ и известном начальном состоянии x_0 вычисляется и в плане минимизации не рассматривается. Операции нахождения экстремума в первых двух слагаемых могут быть выполнены по отдельности благодаря свойствам функций $x(t),u(t)$, образующих пары $d\in V$. Так как для функции $\varphi(t,x)\in\Phi$ выполняются равенства (9),(10), они могут быть переписаны в виде

$$r(t)=\max_{x\in B}\max_{u\in U}R(t,x,u),\quad g=\min_{x\in B}G(t_f,x),$$

поскольку их правые части не зависят от x^1. Тогда

$$\min_{d\in V}L(d)=g-\int_{t_0}^{t_f}r(t)\,dt-\varphi(t_0,x_0).$$

Так как условия 1,2 теоремы 1 выполняются $\forall x^1\in B_1$, то они справедливы и для $x^{1*}(t)$, т.е.

$$R(t,x^*(t),u^*(t))=r(t),\quad t\in T;\qquad G(t_f,x^*(t_f))=g.$$

Из условий теоремы 1 следует, что на паре d^* выполняется равенство $L(d^*)=\min\limits_{d\in V}L(d)$, т.е. $L(d^*)\le L(d)\ \ \forall d\in V$. Так как $d^*\in\boldsymbol{D}(t_0,x_0)\subset V$, то $L(d^*)\le L(d)\ \ \forall d\in\boldsymbol{D}(t_0,x_0)$. Но на множестве $\boldsymbol{D}(t_0,x_0)$ справедливо равенство $L(d)=I(d)$. Поэтому $I(d^*)\le I(d)\ \ \forall d\in\boldsymbol{D}(t_0,x_0)$, что соответствует определению минимума функционала (3). Следовательно, $L(d^*)=\min\limits_{d\in V}L(d)=I(d^*)=\min\limits_{d\in\boldsymbol{D}(t_0,x_0)}I(d)$. Учитывая, что на множестве $\boldsymbol{D}(t_0,x_0)$ справедливо равенство $L(d)=I(d)$, получаем

$$I(d^\varepsilon)-I(d^*)=L(d^\varepsilon)-L(d^*)=G(t_f,x^{1\varepsilon}(t_f),y^\varepsilon(t_f,x^{1\varepsilon}(t_f)))-g+$$
$$+\int_{t_0}^{t_f}[r(t)-R(t,x^{1\varepsilon}(t),y^\varepsilon(t,x^{1\varepsilon}(t)),\boldsymbol{u}^\varepsilon(t,x^{1\varepsilon}(t)))]dt.$$

Тогда

$$\left|I(d^{\varepsilon})-I(d^{*})\right|=\left|G(t_f,x^{1\varepsilon}(t_f),y^{\varepsilon}(t_f,x^{1\varepsilon}(t_f)))-g+\int_{t_0}^{t_f}[r(t)-R(t,x^{1\varepsilon}(t),y^{\varepsilon}(t,x^{1\varepsilon}(t)),\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(t,x^{1\varepsilon}(t)))]dt\right|\le$$

$$\le\left|G(t_f,x^{1\varepsilon}(t_1),y^{\varepsilon}(t_f,x^{1\varepsilon}(t_f)))-g\right|+\left|\int_{t_0}^{t_f}[r(t)-R(t,x^{1\varepsilon}(t),y^{\varepsilon}(t,x^{1\varepsilon}(t)),\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(t,x^{1\varepsilon}(t)))]dt\right|\le$$

$$\le\left|G(t_f,x^{1\varepsilon}(t_f),y^{\varepsilon}(t_f,x^{1\varepsilon}(t_f)))-g\right|+\int_{t_0}^{t_f}\left|r(t)-R(t,x^{1\varepsilon}(t),y^{\varepsilon}(t,x^{1\varepsilon}(t)),\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(t,x^{1\varepsilon}(t)))\right|dt\,.$$

Если условие 1 теоремы 2 выполнено для любых $(t,x^1)\in T\times B_1$, то оно выполняется и для $x^{1\varepsilon}(t)$ при всех $t\in T$. Если условие 2 теоремы 2 выполнено для любых $x^1\in B_1$, то оно выполняется и для $x^{1\varepsilon}(t_1)$. Поэтому

$$\left|I(d^{\varepsilon})-I(d^{*})\right|\le\varepsilon_2+\int_{t_0}^{t_f}\varepsilon_1(t)dt=\varepsilon\,.$$

Доказательство теоремы 2 следует из произвольности начального состояния $x_0\in\Omega$.

Если существует функция $\varphi(t,x)\in\Phi$, удовлетворяющая условиям 1,2 теоремы 1 с $r(t)\ne 0, g\ne 0,$ можно показать, что функция

$$\tilde{\varphi}(t,x)=\varphi(t,x)+\int_{t}^{t_f}r(\tau)\,d\tau-g$$

также удовлетворяет этим условиям при $\tilde{r}\left(t\right)\equiv 0,\ \tilde{g}=0.$ Действительно,

$$\tilde{r}(t)=\max_{x^2\in B_2}\max_{u\in U}\left\{\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}-r(t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x_i}f_i(t,x,u)-f^0(t,x,u)\right\}=0\quad\forall(t,x^1)\in T\times B_1$$

$$\tilde{g}=\min_{x^2\in B_2}\left\{\varphi(t_f,x)-g+F(x)\right\}=0\quad\forall x^1\in B_1\,.$$

При этом $\min\limits_{d\in V}L(d)=\min\limits_{d\in V}I(d)=\min\limits_{d\in\boldsymbol{D}(t_0,x_0)}I(d)=-\tilde{\varphi}(t_0,x_0)\quad\forall x_0\in\Omega$. Поэтому функцию $r(t)$ и величину g в теореме 1 можно без ограничения общности положить равными нулю.

4. СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим решение задачи (4). Будем искать функцию $\varphi(t,x)$ в виде

$$\varphi(t,x)=W(t,x^1)+\sum_{j=m+1}^{n}\psi_j(t,x^1)\cdot x_j\ , \tag{12}$$

где $W(t,x^1),\psi_j(t,x^1)$, $j=m+1,...,n,$ – неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставляя (11) в (8), получаем

$$\begin{gathered}
R\left(t,x,u\right)=\frac{\partial W(t,x^1)}{\partial t}+\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial\psi_j(t,x^1)}{\partial t}\cdot x_j+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial W(t,x^1)}{\partial x_i}\cdot f_i(t,x,u)+\\
+\sum_{j=m+1}^{n}x_j\cdot\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\psi_j(t,x^1)}{\partial x_i}\cdot f_i(t,x,u)+\sum_{j=m+1}^{n}\psi_j(t,x^1)\cdot f_j(t,x,u)-f^0(t,x,u)= \qquad (13)\\
=\underbrace{\frac{\partial W(t,x^1)}{\partial t}+\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial\psi_j(t,x^1)}{\partial t}\cdot x_j}_{\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}}+H(t,x,u),\\
G(t_f,x)=W(t_f,x^1)+\sum_{j=m+1}^{n}\psi_j(t_f,x^1)\cdot x_j+F(x)\,.
\end{gathered}$$

Здесь функция

$$\begin{gathered}
H\left(t,x,u\right)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial W(t,x^1)}{\partial x_i}f_i(t,x,u)+\sum_{j=m+1}^{n}x_j\cdot\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\psi_j(t,x^1)}{\partial x_i}f_i(t,x,u)+\\
+\sum_{j=m+1}^{n}\psi_j(t,x^1)\cdot f_j(t,x,u)-f^0(t,x,u)\,.
\end{gathered}$$

Определяя максимум в (9) с учетом условия 1 теоремы 1 и (13), находим

$$H'(t,x^1,y^*(t,x^1))=\max_{u\in U}H(t,x^1,y^*(t,x^1),u)\,. \tag{14}$$

Предположим, что функции в (13) непрерывно дифференцируемы относительно x^2. Поэтому можно применить необходимые условия безусловного экстремума в (9), (10) по x^2 с учетом условий 1,2 теоремы 1:

$$\frac{\partial R(t,x^1,y^*(t,x^1),\boldsymbol{u}^*(t,x^1))}{\partial x_j}=0\,,\quad j=m+1,...,n\,,$$

$$\frac{\partial G(t_f, x^1, y^*(t_f, x^1))}{\partial x_j} = 0, \quad j = m+1, \ldots, n.$$

Отсюда с учетом (13) имеем

$$\frac{\partial \psi_j(t, x^1)}{\partial t} = -\frac{\partial H'(t, x^1, y^*(t, x^1))}{\partial x_j}, \;\; j = m+1, \ldots, n, \quad \forall (t, x^1) \in T \times B_1,$$

$$\psi_j(t_f, x^1) = -\frac{\partial F(x^1, y^*(t_f, x^1))}{\partial x_j}, \;\; j = m+1, \ldots, n, \quad \forall x^1 \in B_1.$$

Положив в (9), (10) $r(t) \equiv 0, g = 0,$ с учетом (14) и последних соотношений получим

$$\max_{u \in U} \left\{ \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial t} - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial H'(t, x^1, y^*(t, x^1))}{\partial x_j} y_j^*(t, x^1) + H(t, x^1, y^*(t, x^1), u) \right\} = 0 \quad \forall (t, x^1) \in T \times B_1,$$

$$W(t_f, x^1) = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial F(x^1, y^*(t_f, x^1))}{\partial x_j} y_j^*(t_f, x^1) - F(x^1, y^*(t_f, x^1)) \quad \forall x^1 \in B_1,$$

где $H'(t, x^1, y^*(t, x^1))$ определяется выражением (14), а функция $y^*(t, x^1)$ является решением системы (6),(7) с управлением $\boldsymbol{u}^*(t, x^1)$, структура которого находится из условия

$$\boldsymbol{u}^*(t, x^1) = \boldsymbol{u}^*(t, x^1, y^*(t, x^1)) = \arg\max_{u \in U} H(t, x^1, y^*(t, x^1), u).$$

Таким образом, для определения оптимальной синтезирующей функции на множестве Ω в задаче (4) требуется решить систему из $2(n-m)+1$ уравнений в частных производных первого порядка с $2(n-m)+1$ краевыми условиями на концах промежутка T':

$$\frac{\partial y_j^*(t, x^1)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y_j^*(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x^1, y^*(t, x^1), \boldsymbol{u}^*(t, x^1)) + f_j(t, x^1, y^*(t, x^1), \boldsymbol{u}^*(t, x^1)),$$

$$y_j^*(t_0, x^1) = y_{0j}(x^1),$$

$$\max_{u \in U} \left\{ \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial t} - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial H'(t, x^1, y^*(t, x^1))}{\partial x_j} y_j^*(t, x^1) + H(t, x^1, y^*(t, x^1), u) \right\} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_j(t, x^1)}{\partial t} = -\frac{\partial H'(t, x^1, y^*(t, x^1))}{\partial x_j}, \tag{15}$$

$$\psi_j(t_f, x^1) = -\frac{\partial F(x^1, y^*(t_f, x^1))}{\partial x_j},$$

$$W(t_f, x^1) = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial F(x^1, y^*(t_f, x^1))}{\partial x_j} y_j^*(t_f, x^1) - F(x^1, y^*(t_f, x^1)),$$

где $j = m+1, ..., n,\quad H'(t, x^1, y^*(t, x^1)) = \max\limits_{u \in U} H(t, x^1, y^*(t, x^1), u)$.

Минимальное значение функционала (3) можно вычислить по формуле (11) с учетом (12):

$$\min_{d \in \boldsymbol{D}(t_0, x_0)} I(d) = -W(t_0, x_0^1) - \sum_{j=m+1}^{n} \psi_j(t_0, x_0^1) \cdot x_{0j}, \quad \forall\, x_0 \in \Omega. \tag{16}$$

Замечание. Соотношения (15) не эквивалентны достаточным условиям оптимальности (теорема 1). Но структура (12) не задает до конца функцию $\varphi(t, x) \in \Phi$, определяя только частные производные первого порядка по x_j, $j = m+1, ..., n$. Поэтому, если найдено решение системы (15), то оно в общем случае является подозрительным на оптимальность.

В предельных случаях информированности о векторе состояния (им соответствуют различные способы задания множества начальных состояний Ω) система (15) преобразуется к соотношениям принципа максимума и уравнению Беллмана.

5. СТРАТЕГИЯ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ НА ОСНОВЕ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ ε-ОПТИМАЛЬНОСТИ

На основе описанных достаточных условий оптимальности и соотношений сформирована стратегия поиска оптимального управления с неполной обратной связью. Предполагается, что:

– известна оценка множества возможных состояний, которая представляется прямым произведением $\tilde{B} = [\underline{x}_1, \overline{x}_1] \times \cdots \times [\underline{x}_n, \overline{x}_n] = \tilde{B}_1 \times \tilde{B}_2$, где $\underline{x}_i, \overline{x}_i$ – нижняя и верхняя границы по каждой координате соответственно, определяемые физическим смыслом решаемой задачи; $\tilde{B}_1 = [\underline{x}_1, \overline{x}_1] \times \cdots \times [\underline{x}_m, \overline{x}_m]$, $\tilde{B}_2 = [\underline{x}_{m+1}, \overline{x}_{m+1}] \times \cdots \times [\underline{x}_n, \overline{x}_n]$;
– известна оценка множества допустимых значений управления U, представляемая параллелепипедом $\tilde{U} = [a_1, b_1] \times ... \times [a_q, b_q]$, так что $U \subseteq \tilde{U}$ (если множество U задано параллелепипедом, то $\tilde{U} = U$).
– условие $H'(t, x^1, y^*(t, x^1)) = \max\limits_{u \in U} H(t, x^1, y^*(t, x^1), u)$ разрешимо и однозначно определяет структуру управления $\boldsymbol{u}^*(t, x^1)$ с неполной обратной связью.

Стратегия поиска приближенного решения содержит два этапа:

а) нахождение нулевого приближения управления $\boldsymbol{u}^*(t, x^1)$;
б) последовательное улучшение нулевого приближения путем минимизации величины верхней оценки близости текущего управления к оптимальному.

Первый этап. Нахождение нулевого приближения искомого закона управления.

1. Задать структуру управления $\boldsymbol{u}(t, x^1)$ в виде разложений по системе ортонормированных базисных функций:

$$\boldsymbol{u}_j(t, x^1) = \boldsymbol{u}_j\left(t, x_1, ..., x_m\right) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} u_{i_0}^{j,0} q(i_0, t) \sum_{i_1=0}^{L_1-1} u_{i_1}^{j,1} p(i_1, x_1) \cdots \sum_{i_m=0}^{L_m-1} u_{i_m}^{j,m} p(i_m, x_m), \; j = 1, ..., q, \quad (17)$$

где $u_{i_0}^{j,0}$, $u_{i_1}^{j,1}$, $u_{i_m}^{j,m}$ – неизвестные коэффициенты; $\{q(i_0, t)\}, i_0 = 0,1,\ldots$. $\{p(i_1, x_1)\}, i_1 = 0,1,\ldots$; $\{p(i_m, x_m)\},\}, i_m = 0,1,\ldots$ – ортонормированные базисные системы функций.

2. Задать множество $\tilde{\Omega} = [\underset{\sim}{x}_1, \tilde{x}_1] \times ... \times [\underset{\sim}{x}_m, \tilde{x}_m] \subseteq \tilde{B}_1$ возможных начальных значений координат вектора состояния, используемых в управлении.
3. Минимизировать величину функционала

$$J = \frac{1}{\operatorname{mes}\tilde{\Omega}} \int_{\tilde{\Omega}} I(x_0^1, y_0(x_0^1), d) dx_0^1, \quad (18)$$

характеризующую среднее значение функционала (3) на множестве начальных условий $\{x_0 = (x_0^1, y_0(x_0^1))^T, x_0^1 \in \tilde{\Omega}\}$. Определить значения коэффициентов разложения (17) по выбранным базисным системам одним из мультиагентных методов оптимизации [8].

Для нахождения решения системы уравнений

$$\frac{\partial y_j(t, x^1)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y_j(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x^1, y(t, x^1), \boldsymbol{u}(t, x^1)) + f_j(t, x^1, y(t, x^1), \boldsymbol{u}(t, x^1)), \quad (19)$$

$$y_j(t_0, x^1) = y_{0j}(x^1), \quad (20)$$

где $j = m+1, ..., n,$ применить метод характеристик. Уравнениями характеристик этой системы являются уравнения для координат вектора состояния, образующие (1):

$$\begin{gathered} \dot{x}_i(t) = f_i(t, x^1(t), y(t), \boldsymbol{u}(t, x^1(t))), \;\; i = 1, ..., m, \quad x^1(t_0) = x_0^1 \in \tilde{\Omega}, \\ \dot{y}_j(t) = f_j(t, x^1(t), y(t), \boldsymbol{u}(t, x^1(t))), \;\; j = m+1, ..., n, \quad y(t_0) = y_0(x_0^1). \end{gathered} \quad (21)$$

Решение системы устанавливает связь: $x^2 = y(t, x^1) \quad \forall (t, x^1) \in T' \times B_1$.

Для приближенного подсчета величины функционала (18) генерировать по M точек на каждом из отрезков $[\underset{\sim}{x}_1, \tilde{x}_1], ..., [\underset{\sim}{x}_m, \tilde{x}_m]$ при помощи разбиения с шагом $\Delta_j, j = 1, ..., m$, т.е. разбить множество $\tilde{\Omega}$ на Mm элементарных подмножеств ω_k, $\tilde{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{Mm} \omega_k$. В каждом элементарном множестве выбрать среднюю точку: $x_0^{1,k}, k = 1,...,Mm$, а в ней определить соответствующие векторы $x_0^{2,k} = y_0(x_0^{1,k}), k = 1,...,Mm$. В результате получить векторы начальных состояний $x_0^k = (x_0^{1,k}, x_0^{2,k})^T, k = 1,...,Mm$ из множества Ω. При этом справедливо равенство $\operatorname{mes}\tilde{\Omega} = Mm \operatorname{mes}\omega_k$, так как меры $\operatorname{mes}\omega_k$ всех элементарных подмножеств равны.

Тогда значение функционала (18) можно приближенно вычислить по формуле

$$J = \sum_{k=1}^{Mm} I(x_0^k, d) / Mm. \tag{22}$$

Результатом первого этапа является нулевое приближение $\boldsymbol{u}(t, x^1)$.

Второй этап. Последовательное улучшение нулевого приближения.

Согласно теореме 2 требуется найти функцию $\varphi(t,x) \in \Phi$, удовлетворяющую условиям 1 и 2. Она представляется в параметрической форме с использованием разложений по базисным системам функций. Далее реализуется итерационная процедура пошагового улучшения значений параметров с целью минимизации значения оценки ε.

1. Задать представление вспомогательных функций $W(t,x^1)$, $\psi_j(t,x^1)$, $j = m+1,...,n$, образующих функцию $\varphi(t,x) = W(t,x^1) + \sum_{j=m+1}^{n} \psi_j(t,x^1) \cdot x_j$:

$$W(t,x^1) = W\left(t, x_1, ..., x_m\right) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} w_{i_0}^0 q(i_0,t) \sum_{i_1=0}^{L_1-1} w_{i_1}^1 p(i_1,x_1) \cdots \sum_{i_m=0}^{L_m-1} w_{i_m}^m p(i_m,x_m), \tag{23}$$

$$\psi_j(t,x^1) = \psi_j\left(t, x_1, ..., x_m\right) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \psi_{i_0}^{j,0} q(i_0,t) \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \psi_{i_1}^{j,1} p(i_1,x_1) \cdots \sum_{i_m=0}^{L_m-1} \psi_{i_m}^{j,m} p(i_m,x_m), \; j = m+1,...,n,$$

где $w_{i_0}^0$, $w_{i_1}^1$, $w_{i_m}^m$; $\psi_{i_0}^0$, $\psi_{i_1}^1$, $\psi_{i_m}^{j,m}$ – неизвестные коэффициенты; $L_0, L_1, ..., L_m$ – масштабы усечения по времени и координатам вектора состояния, используемым в управлении. В качестве базисных функций $q\left(i_0, t\right)$, $p_k\left(i_k, x_k\right)$, $k = 1,...,m$, можно, например, взять ортонормированную на отрезке $\left[0; t_f\right]$ систему косинусоид или системы многочленов Лежандра, определенные на отрезках $[\underset{\sim}{x}_1, \tilde{x}_1], ..., [\underset{\sim}{x}_m, \tilde{x}_m]$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial W(t,x^1)}{\partial t}$, $\frac{\partial W(t,x^1)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial \psi_j(t,x^1)}{\partial t}$, $\frac{\partial \psi_j(t,x^1)}{\partial x_i}$, $i = 1,...,m; j = m+1,...,n$.

3. Решить задачу минимизации оценки близости к оптимальному решению:

$$\min_{\psi_{i_0 i_1 ... i_m}^j;\, w_{i_0 i_1 ... i_m}} \varepsilon$$

с помощью выбранного мультиагентного алгоритма. При этом использовать нулевое приближение закона управления $\boldsymbol{u}(t,x^1)$ и соответствующее ему решение системы (19), (20).

Для вычисления оценки выполнить следующие операции.

3.1. Проинтегрировать систему уравнений

$$\frac{\partial y_j^*(t,x^1)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y_j^*(t,x^1)}{\partial x_i} f_i(t,x^1,y^*(t,x^1),\boldsymbol{u}(t,x^1)) + f_j(t,x^1,y^*(t,x^1),\boldsymbol{u}(t,x^1)),$$

$$y_j^*(t_0,x^1) = y_{0j}(x^1), \quad j = m+1,\ldots,n,$$

методом характеристик

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t,x^1(t),y(t),\boldsymbol{u}(t,x^1(t))), \; i=1,\ldots,m, \quad x^1(t_0) = x_0^1 \in \tilde{\Omega},$$

$$\dot{y}_j(t) = f_j(t,x^1(t),y(t),\boldsymbol{u}(t,x^1(t))), \; j=m+1,\ldots,n, \quad y(t_0) = y_0(x_0^1).$$

Решение системы устанавливает связь: $x^2 = y(t,x^1) \quad \forall (t,x^1) \in T' \times B_1$.

Для этого задать на отрезке $[t_0,t_f]$ равномерное разбиение $t_0,t_1,\ldots,t_N = t_f$ из N точек с шагом h.

При $t = t_0$ генерировать по M точек на каждом из отрезков $[\underset{\sim}{x}_1,\tilde{x}_1],\ldots,[\underset{\sim}{x}_m,\tilde{x}_m]$ при помощи разбиения с шагом Δ_j, $j=1,\ldots,m$. В результате получить Mm векторов $x_0^{1,k}, k=1,\ldots,Mm$, и $x_0^{2,k} = y_0(x_0^{1,k}), k=1,\ldots,Mm$, образующих векторы начальных состояний $x_0^k = (x_0^{1,k},x_0^{2,k})^T, k=1,\ldots,Mm$ из множества Ω.

В процессе численного интегрирования получить значения координат векторов

$$x^{1,k}(t_i), k=1,\ldots,Mm; \; x^{2,k}(t_i) = y^k(t_i) = y(t_i,x^{1,k}(t_i)), k=1,\ldots,Mm;$$

$$u^k(t_i) = \boldsymbol{u}(t_i x^{1,k}(t_i)), \; k=1,\ldots,Mm; \; i=0,1,\ldots,N.$$

3.2. Вычислить

$$r^k(t_i) = \max_{x^2 \in \tilde{B}_2} \max_{u \in \tilde{U}} R(t_i,x^{1,k}(t_i),x^2,u), \; k=1,\ldots,Mm; \; i=0,1,\ldots,N;$$

$$g^k = \min_{x^2 \in \tilde{B}_2} G(t_N,x^{1,k}(t_N),x^2), k=1,\ldots,Mm;$$

где

$$R(t,x,u) = \frac{\partial W(t,x^1)}{\partial t} + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial \psi_j(t,x^1)}{\partial t} \cdot x_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W(t,x^1)}{\partial x_i} \cdot f_i(t,x,u) +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{n} x_j \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \psi_j(t,x^1)}{\partial x_i} \cdot f_i(t,x,u) + \sum_{j=m+1}^{n} \psi_j(t,x^1) \cdot f_j(t,x,u) - f^0(t,x,u).$$

$$G(t_N,x) = W(t_N,x^1) + \sum_{j=m+1}^{n} \psi_j(t_N,x^1) \cdot x_j + F(x).$$

3.3. Вычислить

$$R(t_i, x^{1,k}(t_i), y^k(t_i) = x^{2,k}(t_i), \boldsymbol{u}(t_i, x^{1,k}(t_i)))\,,\ k = 1,...,Mm\,;\ i = 0,1,...,N\,;$$
$$G(t_N, x^{1,k}(t_N), y^k(t_N, x^{1,k}(t_N)))\,,\ k = 1,...,Mm\,.$$

3.4. Вычислить

$$\varepsilon_1(t_i) = \max_{k=1,...,Mm} \left| r^k(t_i) - R(t_i, x^{1,k}(t_i), y^k(t_i) = x^{2,k}(t_i), \boldsymbol{u}(t_i, x^{1,k}(t_i))) \right|,\ i = 0,1,...,N,$$
$$\varepsilon_2 = \max_{k=1,...,Mm} \left| G(t_N, x^{1,k}(t_N), y^k(t_N, x^{1,k}(t_N))) - g^k \right|.$$

3.5. Вычислить

$$\varepsilon = \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon_1(t)dt + \varepsilon_2 \cong \frac{t_N - t_0}{2N}\left[\varepsilon_1(t_0) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\varepsilon_1(t_i) + \varepsilon_1(t_N)\right] + \varepsilon_2\,. \qquad (24)$$

В результате решения задачи минимизации оценки близости к оптимальному решению находятся значения коэффициентов $\psi^j_{i_0 i_1 \ldots i_m}$, $w_{i_0 i_1 \ldots i_m}$, величина оценки ε и значения коэффициентов $u^{j,0}_{i_0}$, $u^{j,1}_{i_1}$, $u^{j,m}_{i_m}$.

6. МОДЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР

Постановка задачи приведена в табл. 1 ($m = 1$).

Таблица 1

Постановка задачи

Система дифференциальных уравнений	$\begin{cases} \dot{x}_1 = u(t) \\ \dot{x}_2 = x_1(t) \end{cases}$
Временной интервал	$t \in [0; 2]$
Множество начальных условий	$x(t_0) \in \Omega = \left\{ x \mid x_2 = -\frac{4}{3}x_1, x_1 \in R \right\}$
Ограничения на управление	$u \in R$
Функционал (3)	$I(x_0, d) = \frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt + \frac{1}{2}\left[x_1^2(2) + x_2^2(2)\right]$

Требуется найти $\boldsymbol{\varepsilon}$ – оптимальную синтезирующую функцию $\boldsymbol{u}(t, x_1)$ на множестве Ω.

В качестве базисных функций использовалась система нестационарных косинусоид и полиномы Лежандра. Наложены ограничения на значения коэффициентов в (17), (23): $w_{i_0}^0, w_{i_1}^1 \in [-1;1]$, $\psi_{i_0}^0, \psi_{i_1}^1 \in [-0,5;0,5]$, $u_{i_0}^{j,0} \in [-1;0,5]$, $u_{i_1}^{j,1} \in [1;3]$. Задано множество $\tilde{\Omega} = [\underset{\sim}{x}_1, \tilde{x}_1] = [0,5;2,5]$ возможных начальных значений координаты x_1 вектора состояния, используемой в управлении, и $\tilde{B}_1 = [\underline{x}_1, \overline{x}_1] = [0;3]$ – нижняя и верхняя границы по координате x_1.

Выбраны следующие параметры гибридного мультиагентного алгоритма интерполяционного поиска [8]: $NP = 20$, $I_{\max} = 100$, $M_1 = 1$, $M_2 = 7$, $PRTVector = 0,9$, $nstep = 5$, $b_2 = 8$.

Решена задача минимизации оценки близости к оптимальному решению. Найдено ε-оптимальное управление с неполной обратной связью $\boldsymbol{u}(t, x_1)$ и вспомогательные функции $W(t, x_1)$, $\psi_2(t, x_1)$. Для каждой функции определялось рациональное количество коэффициентов в разложении $L_0^u, L_1^u, L_0^W, L_1^W, L_0^\psi, L_1^\psi$ и значения коэффициентов. Результаты численного решения задачи приведены в табл. 2. На рис. 2–4 приведены графики порождаемых законов управления и траекторий системы (1). На рис. 5 изображен график изменения оценки å с ростом числа итераций. Сравнение точного решения $\boldsymbol{u}(t, x_1) = x_1 / (t-3)$ [15] с полученным приближенным решением свидетельствует о приемлемой точности достигнутого результата.

Таблица 2

Результаты решения гибридным мультиагентным методом интерполяционного поиска

Искомые функции	$\boldsymbol{u}(t, x_1)$	$W(t, x_1)$	$\psi_2(t, x_1)$
Масштабы усечения	$L_0^u = 8, L_1^u = 2$	$L_0^W = 4, L_1^W = 4$	$L_0^\psi = 1, L_1^\psi = 1$
Значения коэффициентов в разложениях	–0,79; 0,23; 0,01; 0,14; 0,24; –0,36; 0,23; –0,13; 2,6; 1,51	0,92; 0,38; 0,99; 0,91; 0,05; –0,02; 0,17; –0,37	0,04; 0
Отрезки значений координат при $t_f = 2$	$x_1(2) \in [0,1062; 0,8831]$, $x_2(2) \in [-0,0148; 0,0064]$		
Значение оценки ε (24)	0,874092		

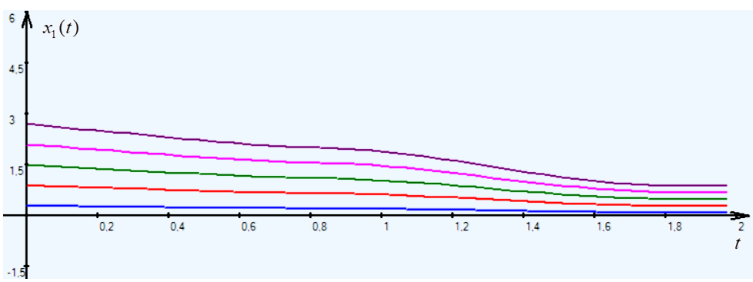

Рис. 2. Графики изменения координаты $x_1(t)$

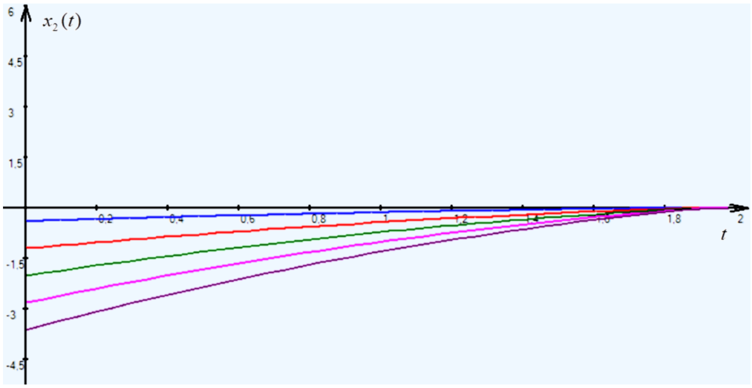

Рис. 3. Графики изменения координаты $x_2(t)$

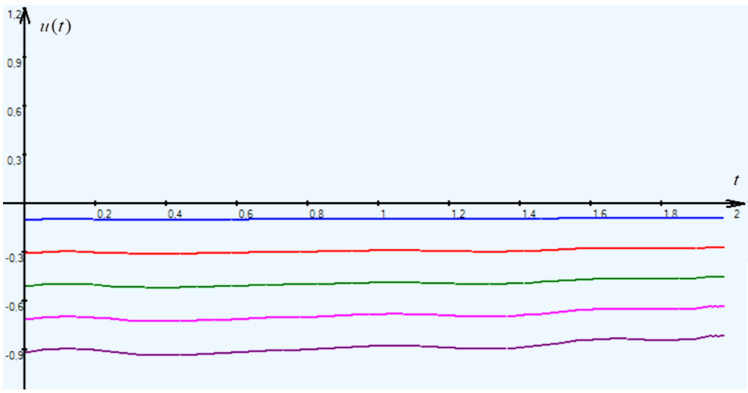

Рис. 4. Графики порождаемого управления $u(t) = \boldsymbol{u}(t, x_1(t))$

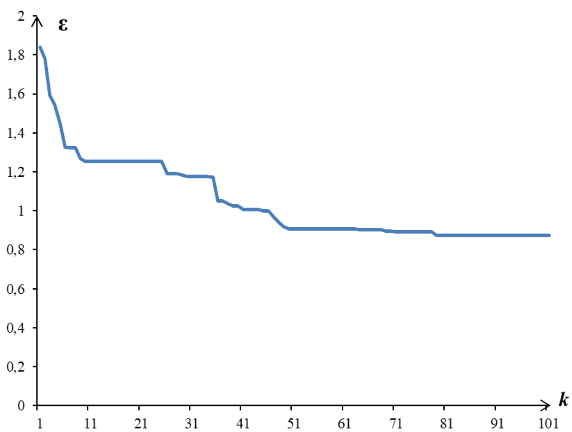

Рис. 5. Изменение величины оценки ε *с ростом числа итераций*

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен и обоснован алгоритм синтеза оптимального управления с неполной обратной связью на заданном многообразии начальных состояний. Приведен пример, иллюстрирующий эффективность предложенного алгоритма, и найдена априорная оценка близости к оптимальному решению.

Литература

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
2. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
3. *Athans M., Falb P.L.* Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications, Chelmsford, MA, USA: Courier Corporation, 2013.
4. *Горнов А.Ю.* Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009.
5. *Срочко В.А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000.
6. *Дыхта В.А., Тятюшкин А.И.* Методы улучшения в вычислительном эксперименте. Новосибирск: Наука, 1988.
7. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Приближенные и численные методы решения задач оптимального управления. М.: МИЭМ, 1989.
8. *Пантелеев А.В., Каранэ М.М.С.* Мультиагентные и биоинспирированные методы оптимизации технических систем. М.: Изд-во Доброе слово и Ко, 2024.
9. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
10. *Krotov V.F.* Global methods in optimal control theory. New York: Marcel Dekker, 1996.
11. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1997.
12. *Гурман В.И.* Приближенный синтез оптимального управления// Автоматика и телемеханика, 1976. № 5.
13. *Батурин В.А.* Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения / В.А. Батурин, Д.Е. Урбанович. – Новосибирск: Наука, 1997.
14. *Weinstein S.E.* Approximation of function of several variables // J. Approximation Theory. 1969. Vol. 2. P. 433–447.
15. *Пантелеев А.В., Семенов В.В.* Синтез оптимальных систем управления при неполной информации. М.: Изд-во МАИ, 1992.
16. *Кротов В.Ф., Фельдман Н.Н.* Итерационный метод решения задач оптимального управления // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 2. С. 160–168.
17. *Хрусталев М.М.* Необходимые и достаточные условия в форме уравнения Беллмана // Доклады АН СССР.1978. Т. 242. № 5. С. 1023–1026.

Approximate Synthesis of Optimal Deterministic Control Systems with Incomplete Feedback Based on Sufficient ε-Optimality Conditions

Andrei V. Panteleev*
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2493-3617
e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Maria Magdalina S. Karane**
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8019-8613
e-mail: mm_karane@mail.ru

The problem of optimal control of deterministic dynamical systems in the absence of information about a part of the coordinates of the state vector is considered. Sufficient ε-optimality conditions based on the principle of expansion are formulated and proved. An algorithm is proposed for finding an a priori estimate of the proximity of the synthesized control law with incomplete feedback to the optimal one for a given set of initial states. The solution of the model example is given.

Keywords: sufficient optimality conditions, optimal synthesizing function, multi-agent algorithm, calculation of a priori estimation.

For citation:
Panteleev A.V., Karane M.M.S. Approximate Synthesis of Optimal Deterministic Control Systems with Incomplete Feedback Based on Sufficient ε-Optimality Conditions. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis,* 2024. Vol. 14, no. 1, pp. 135–154. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2024140109 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. *Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* Mathematical theory of optimal processes. M.: Nauka, 1983. (In Russ.).
2. *Fedorenko R.P.* Approximate solution of optimal control problems. M.: Nauka, 1978. (In Russ.).
3. *Athans M., Falb P.L.* Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications, Chelmsford, MA, USA: Courier Corporation, 2013.

****Andrei V. Panteleev,*** Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2493-361, e–mail: avpanteleev@inbox.ru

*****Maria Magdalina S. Karane,*** Postgraduate Student of the Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8019-8613, e–mail: mm_karane@mail.ru

4. *Gornov A.Yu.* Computational technologies for solving optimal control problems. Novosibirsk: Nauka, 2009. (In Russ.).
5. *Srochko V.A.* Iterative methods for solving optimal control problems. M.: Fizmatlit, 2000. (In Russ.).
6. *Dykhta V.A., Tyatyushkin A.I.* Improvement methods in computational experiment. Novosibirsk: Nauka, 1988. (In Russ.).
7. *Kolmanovsky V.B., Nosov V.R.* Approximate and numerical methods for solving problems of optical control. Moscow: MIEM, 1989. (In Russ.).
8. *Panteleev A.V., Karane M.M.S.* Multi–agent and bio–inspired optimization methods for optimizing technical systems. – M.: Dobroe slovo & Co, 2024.– 336 p. (In Russ.).
9. *Krotov V.F., Gurman V.I.* Methods and problems of optimal control. Moscow: Nauka, 1973. (In Russ.).
10. *Krotov V.F.* Global methods in optimal control theory. New York: Marcel Dekker, 1996.
11. *Gurman V.I.* The principle of expansion in control problems. M.: Nauka, 1997. (In Russ.).
12. *Gurman V.I.* Approximate synthesis of optimal control// Automation and Telemechanics, 1976. No.5. (In Russ.).
13. *Baturin V.A., Urbanovich D.E.* Approximate methods of optimal control based on the principle of expansion. Novosibirsk: Nauka, 1997. (In Russ.).
14. *Weinstein S.E.* Approximation of function of several variables // J. Approximation Theory. 1969. Vol. 2. P. 433–447.
15. *Panteleev A.V., Semenov V.V.* Synthesis of optimal control systems with incomplete information. Moscow: MAI Publishing House, 1992. (In Russ.).
16. *Krotov V. F., Feldman N.N.* Iterative method for solving optimal control problems // Izvestia of the USSR Academy of Sciences. Technical cybernetics. 1983. No. 2. pp. 160–168. (In Russ.).
17. *Khrustalev M.M.* Necessary and sufficient conditions in the form of the Bellman equation // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1978. Vol.242. No.5. pp. 1023–1026. (In Russ.).

Получена 01.03.2024
Принята в печать 14.03.2024

Received 01.03.2024
Accepted 14.03.2024