Моделирование и анализ данных
2023. Том 13. № 1. С. 36–43
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2023130104
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2023. Vol. 13, no. 1, pp. 36–43
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2023130104
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 519.05

Разработка программного обеспечения для проверки транзитивности нечетких отношений

Смерчинская С.О.*
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский институт) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация,
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0614-1835
e-mail: svetlana_os@mail.ru

Киселев Д.М.**
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский институт) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация,
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4509-3533
e-mail: kiselevdaniilm@gmail.com

В статье рассматривается проблема проверки транзитивности нечеткого отношения и нахождения транзитивного замыкания. Сформированы алгоритмы решения, описано соответствующее программное обеспечение. Приведена логическая схема.

Ключевые слова: нечеткие отношения, транзитивность, транзитивное замыкание.

Для цитаты:
Смерчинская С.О., Киселев Д.М. Разработка программного обеспечения для проверки транзитивности нечетких отношений // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 1. С. 36–43. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2023130104

***Смерчинская Светлана Олеговна,** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московского авиационного института (национального исследовательского университета) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0614-1835, e-mail: svetlana_os@mail.ru

****Киселев Даниил Михайлович,** студент магистратуры института «Компьютерные науки и прикладная математика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4509-3533, e-mail: kiselevdaniilm@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

В практических задачах принятия решений теория нечетких множеств имеет преимущества перед методами теории вероятности, если оценки получаются из опросов экспертов, в силу меньшей требовательности к квалификации экспертов. Особенно различия в подходах заметны при граничных значениях вероятностей (стремлении к нулю или единице). Поэтому зачастую методы теории нечетких множеств позволяют точнее обработать имеющуюся информацию.

Одной из основных операций, применяемых при решении задач принятия решений, является проверка построенного отношения на транзитивность, а также нахождение транзитивного замыкания. В случае четких множеств данные задачи хорошо изучены. Например, с помощью алгоритма Уоршалла, полиномиальной сложности порядка $O\left(n^3\right)$, можно построить транзитивное замыкание бинарного отношения [1, 2]. Поэтому тот факт, что проверке на транзитивность и последующему взятию транзитивного замыкания подвергается любое решение, как правило не усложняет решение задачи.

В случае нечетких множеств приходится опираться на модифицированное определение транзитивности, что ведет к усложнению алгоритмов решения задачи. В статье описаны основные понятия, необходимые для решения задачи. Предлагается метод сокращения вычислений при проверке нечеткого отношения на транзитивность, а также при взятии транзитивного замыкания. Описывается программная реализация поставленной задачи.

2. ПРОВЕРКА ТРАНЗИТИВНОСТИ НЕЧЕТКОГО ОТНОШЕНИЯ

Для проверки транзитивности нечеткого бинарного отношения воспользуемся следующим определением [3].

Определение 1. Нечеткое бинарное отношение называется *транзитивным*, если

$$\mu_\rho(x,y) \geq min\{\mu_\rho(x,z), \mu_\rho(z,y)\}, \text{ для всех } x,y,z \in X, \quad (1)$$

где $\mu_\rho\left(x,y\right)$ – функция принадлежности нечеткого бинарного отношения ρ на X.

Из определения следует, что ввиду необходимости перебора и сравнения всех элементов для проверки транзитивности нечеткого отношения требуется сравнительно большое количество операций. Для проверки на транзитивность множества X мощности n потребуется совершить n^2 раз n операций.

Для проверки бинарного отношения на транзитивность для четких множеств используется понятие композиции отношений. Определим понятие композиции для нечетких отношений.

Определение 2. Композицией нечетких бинарных отношений ρ_1 и ρ_2 на X называется нечеткое бинарное отношение $\rho_1 \circ \rho_2$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{\rho_1 \circ \rho_2}\left(x,y\right) = \max_{z \in X} \min\left\{\mu_{\rho_1}\left(x,z\right), \mu_{\rho_2}\left(z,y\right)\right\}.$$

Соответственно, композиция отношения ρ на себя:

$$\mu_{\rho^2}\left(x,y\right)=\max_{z\in X} min\left\{\mu_\rho\left(x,z\right),\mu_\rho\left(z,y\right)\right\}. \tag{2}$$

Тогда, для проверки на транзитивность можно воспользоваться свойством транзитивных отношений:

Свойство 1. Если отношение ρ транзитивно, то выполняется $\rho^2 \subseteq \rho$.

3. ТРАНЗИТИВНОЕ ЗАМЫКАНИЕ

Алгоритм нахождения транзитивного замыкания нечеткого отношения, как и способ проверки на транзитивность с помощью композиции отношений, основан на нахождении композиции ρ^2 .

По аналогии с транзитивным замыканием для четкого случая применяется алгоритм Уоршалла, с использованием переопределенной операции композиции для нечетких бинарных отношений:

$$Tr\,\rho=\rho\bigcup\rho^2\bigcup\ldots\bigcup\rho^{n-1}. \tag{3}$$

Стоит отметить, что для нечетких множеств результатом операции дизъюнкции является максимальное значение функции принадлежности среди значений с одинаковыми индексами в операндах.

Для сокращения вычислений на каждом этапе будет использоваться следующее утверждение (доказательство приведено в [1]).

Утверждение 1. Пусть матрице P нечеткого отношения ρ поставлена в соответствие матрица R , полученная из P заменой всех ненулевых элементов на единицы. Тогда нулевые элементы матриц $P^k = p_{ij}^k$ и $R^k = r_{ij}^k$ отношения ρ^k , заданного на множестве X мощности n совпадают.

4. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Для написания программы использовался язык Python, а также библиотека NumPy для работы с матрицами и PyQt для проектирования интерфейса. Приведены алгоритмы работы и описания функций, реализующих проверку на транзитивность и расчет транзитивного замыкания нечеткого отношения.

1. Проверка на транзитивность, с использованием 1 способа:

Функция tr_relation получает на вход матрицу P нечеткого бинарного отношения предпочтения ρ , заданного на множестве альтернатив X мощности n . Заводится переменная-флаг равная нулю, которая прервет последующий алгоритм в случае нарушения условия, описанного в (1). Нумерация строк и столбцов внутри матрицы начинается с нуля.

- Последовательно, начиная с нуля, выбирается строка. Индекс строки ключевого элемента далее обозначается x.
- Аналогично выбирается столбец. Индекс столбца ключевого элемента далее обозначается y.

- Таким образом, выбран элемент $\mu_\rho(x,y)$, который будет проверен на транзитивность по условию (1). Значение элемента для последующего сравнения копируется в отдельную переменную.
- Последовательно перебираются все возможные значения z от 0 до $n-1$. Для каждого z значение $min\{\mu_\rho(x,z),\mu_\rho(z,y)\}$ сравнивается с выбранным элементом. Если условие (1) не выполняется, «поднимается» флаг и перебор завершается досрочно, функция выдает сообщение о том, что отношение не транзитивно.

Если перебор последовательно были перебраны и сравнены все элементы и флаг не был поднят – выводится сообщение о транзитивности отношения.

Вычислительная сложность алгоритма для наихудшего случая (полный перебор для транзитивного отношения) составляет $O(n^3)$. Однако, из-за возможности досрочного завершения алгоритма, в среднем результаты будут лучше.

2. Проверка на транзитивность с использованием композиции ρ^2 (2):

Вход функции tr_check аналогичен предыдущей. Заводится новый массив размерности $n\times n$, в котором будут хранится значения функций принадлежности для отношения ρ^2. Нумерация строк и столбцов внутри матриц начинается с нуля.

- Последовательно, начиная с нуля, выбирается строка. Индекс строки ключевого элемента далее обозначается x
- Аналогично выбирается столбец. Индекс столбца ключевого элемента далее обозначается y.
- Таким образом, выбран элемент $\mu_{\rho^2}(x,y)$ нового массива для вычисления. Заводим отдельную переменную max_val для хранения максимального значения, приравниваем к нулю.
- Последовательно перебираются все возможные значения z от 0 до $n-1$. Для каждого z значение $min\{\mu_\rho(x,z),\mu_\rho(z,y)\}$ сравнивается с max_val. Если минимальное значение больше – то max_val приравнивается к нему.
- Значение $\mu_{\rho^2}(x,y)$ нового массива обновляется в соответствии с max_val, значение временной переменной обнуляется, выбирается новый ключевой элемент.

Выходом данного алгоритма будет матрица бинарного нечеткого отношения ρ^2. Далее данная матрица сравнивается с входной поэлементно с использованием функции np.less_equal, входящей в библиотеку NumPy, на основании *свойства 1* делается вывод о транзитивности отношения.

Алгоритм имеет вычислительную сложность $O(n^3)$ для любого случая и требует выделения памяти для хранения нового массива размерности $n\times n$.

3. Транзитивное замыкание нечеткого бинарного отношения:

На вход функции tr_zam также подается матрица P нечеткого бинарного отношения предпочтения ρ, заданного на множестве альтернатив X мощности n. Создается массив R, полученный из P заменой всех ненулевых элементов на единицы, а также массив P_final для хранения результата.

- Последовательно, начиная с двойки, матрица R возводится в степень i, где i принимает значения от 2 до $n-1$. С помощью функции argwhere, встроенной в NumPy, создается массив $Index$ с индексами ненулевых элементов данной матрицы R^i.
- Заводится массив P^n для хранения результатов на текущем проходе алгоритма.
- Для каждого элемента, индекс которого хранится в массиве $Index$ повторяются шаги 4 и 5 алгоритма проверки на транзитивность с использованием композиции отношения на себя. Массив P^n заполняется результатами.
- В массив P_final записывается результат дизъюнкции массива P_final и P^n, возвращение на 1 шаг, i увеличивается на единицу.

На выход данная функция подает матрицу транзитивного замыкания нечеткого отношения. Вычислительная сложность алгоритма для наихудшего случая $O\left(n^5\right)$. Возможно улучшение результатов при использовании различных методов быстрого возведения матриц в степень. В среднем результат будет лучше за счет того, что на 3 шаге перебираются только элементы с индексами в массиве, а не все элементы матрицы.

5. МОДЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

Пример 1. Проверить транзитивность нечеткого отношения ρ, заданного матрицей P.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

Для проверки используется первый способ, описанный ранее. Нужно перебрать элементы и проверить выполнение (1) для каждого из них.

$$\begin{gathered}
p_{11} = 0: min\left\{\mu_\rho\left(1,1\right), \mu_\rho\left(1,1\right)\right\} = min\left\{0, 0\right\} = 0; \\
min\left\{\mu_\rho\left(1,2\right), \mu_\rho\left(2,1\right)\right\} = min\left\{0.6, 0\right\} = 0; \\
min\left\{\mu_\rho\left(1,3\right), \mu_\rho\left(3,1\right)\right\} = min\left\{0.5, 0\right\} = 0; \\
p_{12} = 0.6: min\left\{\mu_\rho\left(1,1\right), \mu_\rho\left(1,2\right)\right\} = min\left\{0, 0.6\right\} = 0; \\
min\left\{\mu_\rho\left(1,2\right), \mu_\rho\left(2,2\right)\right\} = min\left\{0.6, 0\right\} = 0; \\
min\left\{\mu_\rho\left(1,3\right), \mu_\rho\left(3,2\right)\right\} = min\left\{0.5, 0.4\right\} = 0.4; \\
p_{13} = 0.5: min\left\{\mu_\rho\left(1,1\right), \mu_\rho\left(1,3\right)\right\} = min\left\{0, 0.5\right\} = 0; \\
min\left\{\mu_\rho\left(1,2\right), \mu_\rho\left(2,3\right)\right\} = min\left\{0.6, 0.7\right\} = 0.6; \left(0.6 > p_{13}\right).
\end{gathered}$$

Для элемента p_{13} соотношение (1) не выполняется. Отношение не является транзитивным. Если бы соотношение выполнялось для p_{13}, проверялись бы последующие элементы.

Пример 2. Для нечеткого нетранзитивного отношения ρ, заданного матрицей P из предыдущего примера, найти транзитивное замыкание.

Создается матрица R, полученная из P заменой всех ненулевых элементов на единицы.

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица R возводится в квадрат:

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ненулевые элементы R^2 выписываются в массив $Index = \{(1,3),(2,2),(3,3)\}$. Таким образом, используя *утверждение 1* для вычисления P^2, нужно будет пройтись только по трем элементам, остальные будут равны нулю. Для вычисления используется соотношение (2).

$$p_{13}^2 = max\left\{min\{\mu_\rho(1,1),\mu_\rho(1,3)\}, min\{\mu_\rho(1,2),\mu_\rho(2,3)\}, min\{\mu_\rho(1,3),\mu_\rho(3,3)\}\right\} ==$$
$$== max\left\{min\{0,0.5\}, min\{0.6,0.7\}, min\{0.5,0\}\right\} = 0.6$$

$$p_{22}^2 = max\left\{min\{\mu_\rho(2,1),\mu_\rho(1,2)\}, min\{\mu_\rho(2,2),\mu_\rho(2,2)\}, min\{\mu_\rho(2,3),\mu_\rho(3,2)\}\right\} ==$$
$$== max\left\{min\{0,0.6\}, min\{0,0\}, min\{0.7,0.4\}\right\} = 0.4$$

$$p_{33}^2 = max\left\{min\{\mu_\rho(3,1),\mu_\rho(1,3)\}, min\{\mu_\rho(3,2),\mu_\rho(2,3)\}, min\{\mu_\rho(3,3),\mu_\rho(3,3)\}\right\} ==$$
$$== max\left\{min\{0,0.5\}, min\{0.4,0.7\}, min\{0,0\}\right\} = 0.4$$

Тогда, матрица P^2 композиции отношения ρ на себя:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления транзитивного замыкания используется (3):

$$Tr\,\rho = \rho \cup \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0.7 \\ 0 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Получено транзитивное замыкание отношения ρ.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Написано программное обеспечение для реализации проверки транзитивности нечеткого отношения и расчета транзитивного замыкания. Применение алгоритмов продемонстрировано на модельных примерах. На примере показано сокращение количества вычислений при использовании сформулированного утверждения. Выходные данные программного обеспечения совпали с полученным решением.

Литература

1. *Смерчинская С.О., Ящина Н.П.* Агрегирование нечетких отношений строгого порядка // Известия высших учебных заведений. Математика. 2022, № 7, С. 30–43.
2. *Гусева А.И., Тихомирова А.Н.* Дискретная математика для информатиков и экономистов: Учебное пособие. – М.: НИЯУ МИФИ, 2010. С. 260–264.
3. *Губко М.В.* Лекции по принятию решений в условиях нечеткой информации. Версия 1. [Электронный ресурс] // Aup.ru: Административно-управленческий портал. – М.: ИПУ РАН, 2004. URL: http://www.aup.ru/files/m539/m539.pdf (дата обращения 19.01.2023).

Development of Software to Test Transitivity of Fuzzy Relations

Svetlana O. Smerchinskaya*
Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0614-1835
e-mail: svetlana_os@mail.ru

Daniil M. Kiselev**
Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4509-3533
e-mail: kiselevdaniilm@gmail.com

The problem of fuzzy relation transitivity checking and transitive closure finding is considered in the paper. Solution algorithms are formulated and corresponding software is described. A logical scheme is given.

Keywords: fuzzy relations, transitivity, transitive closure.

For citation:
Smerchinskaya S.O., Kiselev D.M. Development of Software to Test Transitivity of Fuzzy Relations. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 1, pp. 36–43. DOI: 10.17759/mda.2023130104 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Smerchinskaya S.O., Yashina N.P. Agregirovanie nechetkih otnosheniy strogogo poryadka [Aggregation of strict order fuzzy relations]. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika.* [*News of Higher Education Institutions. Mathematics.]*, 2022, no. 7, pp. 30–43.
2. Guseva A.I., Tikhomirova A.N. Diskretnaya matematika dlya informatikov i economistov: Uchebnoe posobie. [Discrete mathematics for Computer Scientists and Economists: Textbook]. – Moscow: Publ. NRNU MEPhI, 2010, pp. 260–264. (In Russ.).
3. Gubko M.V. Lekcii po prinyatiyu resheniy v usloviyah nechetkoy informacii. Versiya 1. [Lectures on decision-making in a fuzzy information environment. Version 1.]. – Moscow.: ICS RAS, 2004. Available at: http://www.aup.ru/files/m539/m539.pdf (Accessed 19.01.2023). (In Russ.).

***Svetlana O. Smerchinskaya,** PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical Cybernetics, Institute of Computer Sciences and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0614-1835, e-mail: svetlana_os@mail.ru

****Daniil M. Kiselev,** Graduate Student of the Institute of Computer Sciences and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4509-3533, e-mail: kiselevdaniilm@gmail.com

Получена 18.01.2023 | Received 18.01.2023
Принята в печать 17.02.2023 | Accepted 17.02.2023