



## ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

### Синтез $H_\infty$ регуляторов на конечном промежутке времени

УДК 681.5

**Пантелеев А.В.** \*

Московский авиационный институт (НИУ МАИ),  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>  
e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

**Яковлева А.А.** \*\*

Московский авиационный институт (НИУ МАИ),  
г. Москва, Российская Федерация  
e-mail: [ayakovleva982@gmail.com](mailto:ayakovleva982@gmail.com)

В статье рассматривается проблема нахождения  $H_\infty$  – регуляторов в задаче управления по выходу. Сформулированы и доказаны достаточные условия, при которых может быть синтезировано  $H_\infty$  – управление на конечном промежутке времени функционирования динамической системы. Предложены два приближенных подхода к формированию и исследованию качества замкнутых систем в условиях неполной информации о векторе состояния.

**Ключевые слова:** линейный регулятор,  $H_\infty$  – управление, управление с обратной связью, стабилизация самолета, алгоритмическое обеспечение, программное обеспечение, конечное время функционирования.

**Для цитаты:**

Пантелеев А.В., Яковлева А.А. Синтез  $H_\infty$  регуляторов на конечном промежутке времени // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 1. С. 5–19 . DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110101>

\***Пантелеев Андрей Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» института «Информационные технологии и прикладная математика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ (НИУ)), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

\*\***Яковлева Александра Алексеевна**, студент магистратуры, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ (НИУ)), г. Москва, Российская Федерация, e-mail: [ayakovleva982@gmail.com](mailto:ayakovleva982@gmail.com)



## 1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи и методы нахождения  $H_\infty$  – управления стали уже классическими [1–8]. Однако решение проблемы синтеза регуляторов в условиях неполной информации о состоянии до сих пор вызывает трудности. В статье при помощи методики, описанной в [1, 3, 5–7], сформулированы и доказаны достаточные условия  $H_\infty$  – управления, качество которого зависит от поведения вектора выхода модели измерительной системы. Найдены законы управления моделью объекта и внешним воздействием с обратной связью по полному вектору состояния. Поскольку он в общем случае является информацией обо всех координатах вектора состояния является недоступной, предлагаются два приближенных подхода. Первый связан с нахождением псевдорешения линейной модели измерительной системы и его использованием в управлении, второй – с синтезом наблюдателя состояния, вырабатывающего оценку вектора состояния, и использованием оценки в управлении. Приведен пример решения задачи стабилизации самолета, иллюстрирующий эффективность предложенных подходов.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Заданы математическая модель объекта управления

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t), \quad x(0) = 0, \quad (1)$$

и модель измерительной системы

$$y(t) = C(t)x(t), \quad (2)$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния,  $u \in R^q$  – вектор управления,  $w \in R^p$  – вектор возмущений,  $y \in R^m$  – вектор выхода (вектор измерений),  $t \in T = [0, t_1]$  – время,  $t_1$  – заданное положительное число. Заданы непрерывные матрицы  $A(t)$ ,  $B_1(t)$ ,  $B_2(t)$ ,  $C(t)$  размеров  $(n \times n)$ ,  $(n \times p)$ ,  $(n \times q)$ ,  $(m \times n)$  соответственно.

Предполагается, что

- а)  $w(\cdot) \in L_2 [0, \infty)$ ,  $u(\cdot) \in L_2 [0, \infty)$ ,
- б)  $m \leq n$ ,  $\text{rg } C(t) = m \quad \forall t \in T$ ;
- в) система полностью управляемая и наблюдаемая:  
 $\text{rg}(B \quad AB_2 \quad \dots \quad A^{n-1}B_2) = n$ ,  $\text{rg}(C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} C^T) = n$ .

Обозначим  $\|z(t)\|^2 = y(t)^T S(t)y(t) + u^T(t)Q(t)u(t)$  – характеристику текущего поведения системы, где  $Q(t)$  – положительно определенная симметрическая матрица,  $S(t)$  – неотрицательно определенная симметрическая матрица; а также  $\|F(t_1)\|^2 = x(t_1)^T \Lambda x(t_1)$  – характеристику конечного состояния системы, где  $\Lambda$  – симметрическая неотрицательно определенная матрица размеров  $(n \times n)$ .

Требуется обеспечить (если это возможно) выполнение неравенства



$$\frac{\int_0^{t_1} \|z(t)\|^2 dt + \|F(t_1)\|^2}{\int_0^{t_1} \|w(t)\|^2 dt} = \frac{\int_0^{t_1} [y(t)^T S(t)y(t) + u^T(t)Q(t)u(t)] dt + x(t_1)^T \Lambda x(t_1)}{\int_0^{t_1} \|w(t)\|^2 dt} =$$

$$= \frac{\int_0^{t_1} [x^T(t) C(t)^T S(t) C(t) x(t) + u^T(t) Q(t) u(t)] dt + x(t_1)^T \Lambda x(t_1)}{\int_0^{t_1} w^T(t) w(t) dt} \leq \gamma^2, \quad (3)$$

где  $\gamma > 0$  – заданное неотрицательное число, при одновременном обеспечении устойчивости замкнутой системы. При этом желательно найти минимальное значение  $\gamma^*$ , при котором указанные свойства еще справедливы, чего можно добиться, минимизируя значение числителя дроби при одновременной максимизации знаменателя.

Иными словами, функционал качества должен удовлетворять условию

$$I(u, w) = \int_0^{t_1} [\|z(t)\|^2 - \gamma^2 w^T(t) w(t)] dt + \|F(t_1)\|^2 =$$

$$= \int_0^{t_1} [x^T(t) C^T S C x(t) + u^T(t) Q u(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t)] dt + x(t_1)^T \Lambda x(t_1) \leq 0,$$

которое будет выполняться при минимизации затрат на управление при наилучшем влиянии возмущений.

### 3. СИНТЕЗ $H_\infty$ – РЕГУЛЯТОРОВ

Пусть имеется функция  $V(t, x) \in C^{1,1}$ . Составим конструкции

$$R(t, x, u, w) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \left( \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right)^T [A(t)x + B_1(t)w + B_2(t)u] +$$

$$+ x^T C(t)^T S(t) C(t) x + u^T Q(t) u - \gamma^2 w^T w, \quad (4)$$

$$G(t_1, x) = V(t_1, x) - x^T \Lambda x,$$

где  $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = \left( \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_n} \right)^T$ .

**Теорема.** Если существует функция  $V(t, x) \in C^{1,1}$ , удовлетворяющая условию  $V(t, 0) = 0$  и



$$R(t, x, u^*(x), w^*(x)) = \min_u \max_w R(x, u, w) = 0 \quad \forall x \in R^n, \forall t \in T, \quad (5)$$

$$G(t, x) = 0 \quad \forall x \in R^n,$$

где

$$u^*(t, x) = -\frac{1}{2} Q^{-1}(t) B_2^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) x,$$

$$w^*(t, x) = \frac{1}{2\gamma^2} B_1^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{\gamma^2} B_1^T(t) K_2(t) x, \quad (6)$$

а матрица  $K_2(t) \geq 0$  удовлетворяет уравнению Риккати

$$\dot{K}_2 + K_2 A + A^T K_2 - K_2 \left[ B_2 Q^{-1} B_2^T - \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T \right] K_2 + C^T S C = 0, K_2(t_1) = \Lambda, \quad (7)$$

то неравенство (3) справедливо.

**Доказательство.** Пусть выполняются условия утверждения. Найдем  $\min_u \max_w R(t, x, u, w)$  с помощью необходимых условий экстремума:

$$\frac{\partial R(t, x, u, w)}{\partial u} = B_2^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} - 2Q(t)u = 0,$$

$$\text{отсюда } u^*(t, x) = -\frac{1}{2} Q^{-1}(t) B_2^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial R(t, x, u, w)}{\partial w} = B_1^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} - 2\gamma^2 w = 0,$$

$$\text{отсюда } w^*(t, x) = \frac{1}{2\gamma^2} B_1^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}.$$

Здесь  $u^*(t, x), w^*(t, x)$  – структуры управления объектом и возмущением (внешним воздействием).

Достаточные условия безусловного минимума по  $u$  выполняются, поскольку  $\frac{\partial^2 R(t, x, u, w)}{\partial u^T \partial u} = 2Q(t) > 0$  и максимума по  $w$  также выполняются, так как

$$\frac{\partial^2 R(t, x, u, w)}{\partial w^T \partial w} = -2\gamma^2 < 0.$$

Тогда

$$R(t, x, u, w) = R(t, x, u^*(t, x), w^*(t, x)) - \gamma^2 [w - w^*(t, x)]^T [w - w^*(t, x)] +$$

$$+ [u - u^*(t, x)]^T Q [u - u^*(t, x)].$$

Отсюда

$$R(t, x, u^*(t, x), w(t, x)) \leq R(t, x, u^*(t, x), w^*(t, x)) \leq R(t, x, u(t, x), w^*(t, x)), \quad (8)$$



т.е. имеется седловая точка.

Пусть имеющаяся функция  $V(t, x) \in C^{1,1}$  удовлетворяет условию  $V(0, 0) = 0$  и  $R(x, u^*(t, x), w^*(t, x)) = 0$ .

Так как система полностью управляемая и наблюдаемая, то для любых  $u(\cdot) \in L_2[0, \infty)$ ,  $w(\cdot) \in L_2[0, \infty)$  то имеем  $y(\cdot) \in L_2[0, \infty)$ .

Вдоль траекторий динамической системы справедливо

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \left( \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} \right)^T [A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t)] + \|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2 = \\ = \frac{dV(t, x(t))}{dt} + \|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2 = \underbrace{R(t, x, u^*(t, x(t)), w^*(t, x(t)))}_0 - \\ - \gamma^2 [w(t) - w^*(t, x(t))]^T [w(t) - w^*(t, x(t))] + [u(t) - u^*(t, x)]^T Q(t) [u - u^*(t, x(t))]. \end{aligned}$$

Рассмотрим левую часть неравенства (8), а именно

$$R(t, x, u^*(t, x), w(t, x)) \leq \underbrace{R(t, x, u^*(t, x(t)), w^*(t, x(t)))}_0, \text{ т.е. при } u = u^*(x):$$

$$\frac{dV(t, x(t))}{dt} + \|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2 \leq 0.$$

Проинтегрируем левую и правую части по времени от 0 до  $t_1$ :

$$V(t_1, x(t_1)) - V(0, x(0)) + \int_0^{t_1} \|z(t)\|^2 dt - \gamma^2 \int_0^{t_1} \|w(t)\|^2 dt \leq 0.$$

Так как  $G(t_1, x) = V(t_1, x) - x^T \Lambda x = 0$ , то  $V(t_1, x(t_1)) = x(t_1)^T \Lambda x(t_1)$ . Так как  $x(0) = 0$ , то  $V(0, x(0)) = V(0, 0) = 0$ . Отсюда следует, что

$$\int_0^{t_1} \|z(t)\|^2 dt + x(t_1)^T \Lambda x(t_1) \leq \gamma^2 \int_0^{t_1} \|w(t)\|^2 dt.$$

Поэтому условие (3) справедливо.

Пусть  $V(t, x) = x^T K_2(t) x$ , где  $K_2(t)$  – симметрическая положительно определенная матрица. Тогда  $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = 2K_2(t) x$  и

$$u^*(t, x) = -\frac{1}{2} Q^{-1}(t) B_2^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) x,$$

$$w^*(t, x) = \frac{1}{2\gamma^2} B_1^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{\gamma^2} B_1^T(t) K_2(t) x.$$

Запишем условие  $R(t, x, u^*(t, x), w^*(t, x)) = 0$  (для сокращения записи опустим аргумент  $t$ ):



$$\begin{aligned} \dot{K}_2 + 2x^T K_2 A x + 2x^T K_2 B_1 \frac{1}{2\gamma^2} B_1^T 2K_2 x - 2x^T K_2 B_2 \frac{1}{2} Q^{-1} B_2^T 2K_2 x + x^T C^T S C x + \\ + x^T K_2 B_2 Q^{-1} B_2^T K_2 x - \frac{1}{\gamma^2} x^T K_2 B_1 B_1^T K_2 x = 0, \end{aligned}$$

или

$$x^T \left[ \dot{K}_2 + 2K_2 A + \frac{1}{\gamma^2} K_2 B_1 B_1^T K_2 - K_2 B_2 Q^{-1} B_2^T K_2 + C^T S C \right] x = 0. \quad (9)$$

Условие  $G(t_1, x) = V(t_1, x) - x^T \Lambda x = 0$  имеет вид

$$x^T [K_2(t_1) - \Lambda] x = 0. \quad (10)$$

Применяя в (9), (10) условие  $[\cdot] + [\cdot]^T = 0$ , получаем

$$\dot{K}_2 + K_2 A + A^T K_2 - K_2 \left[ B_2 Q^{-1} B_2^T - \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T \right] K_2 + C^T S C = 0, \quad K_2(t_1) = \Lambda.$$

$$u^*(t, x) = -\frac{1}{2} Q^{-1}(t) B_2^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) x,$$

$$w^*(t, x) = \frac{1}{2\gamma^2} B_1^T(t) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{\gamma^2} B_1^T(t) K_2(t) x.$$

Доказательство закончено.

**Замечание.** Если энергия возмущений, действующих на систему, ограничена, то

$$\int_0^{t_1} \|w(t)\|^2 dt \leq 1, \text{ то } \int_0^{t_1} \|z(t)\|^2 dt + \underbrace{x(t_1)^T \Lambda x(t_1)}_{F(t_1)} \leq \gamma^2.$$

#### 4. СИНТЕЗ $H_\infty$ – РЕГУЛЯТОРОВ ПО ВЫХОДУ

Если  $m = n$  и матрица  $C(t)$  невырожденная  $\forall t \in T$ , то вектор состояния находится по вектору выхода непосредственно:  $x = C^{-1}(t)y$ . Тогда управление по выходу

$$u^*(t, y) = -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) C^{-1}(t) y.$$

Если  $m \leq n$ ,  $\text{rg } C(t) = m \quad \forall t \in T$ , можно применить два подхода. Первый связан с нахождением псевдорешения  $\tilde{x}$  системы  $y = C(t)x$  и его использованием в управлении, второй – с синтезом наблюдателя состояния, вырабатывающего оценку  $\hat{x}$  вектора состояния, и использованием оценки в управлении.

Первый подход. Найти псевдорешение системы  $y = C(t)x$  при помощи псевдообратной матрицы  $C^{-1}(t) = C^T(t)[C(t)C^T(t)]^{-1}$ :

$$\tilde{x} = C^{-1}(t)y,$$



т.е. наименьший по модулю столбец  $\tilde{x}$  среди всех столбцов  $x$ , минимизирующих величину  $|C(t)x - y|$ , где модуль столбца  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ . Тогда управление по выходу имеет вид

$$u^*(t, y) = u^*(t, \tilde{x}) = -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) C^T(t) [C(t) C^T(t)]^{-1} y. \quad (9)$$

Второй подход. Синтезировать асимптотический наблюдатель полного порядка

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = x_0^*, \quad (10)$$

где  $K(t)$  – матрица коэффициентов усиления наблюдателя размеров  $(n \times m)$ ,  $x_0^*$  – столбец, содержащий априорную информацию о начальном состоянии. Матрица  $K(t)$  подбирается из условий, обеспечивающих асимптотическое стремление погрешности  $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  к нулю. Тогда управление имеет вид

$$u^*(t, y_0^*) = u^*(t, \hat{x}) = -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) \hat{x}, \quad (11)$$

где  $y_0^* = \{y(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$  – накапливаемая информация о результатах измерения.

## 5. АЛГОРИТМ АНАЛИЗА КАЧЕСТВА $H_\infty$ – РЕГУЛЯТОРОВ ПО ВЫХОДУ

1. Задать параметр  $\gamma > 0$ . Найти решение уравнения Риккати

$$\dot{K}_2 + K_2 A + A^T K_2 - K_2 \left[ B_2 Q^{-1} B_2^T - \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T \right] K_2 + C^T S C = 0, \quad K_2(t_1) = \Lambda,$$

при фиксированном  $\gamma$ , удовлетворяющее условиям  $K_2 \geq 0$ .

Последовательно уменьшая  $\gamma$ , найти минимальное значение  $\gamma^*$ , при котором все условия остаются справедливыми.

2. Найти управление объектом вида (9) или (11) и закон изменения возмущающего воздействия  $w^*(t, x) = \frac{1}{\gamma^2} B_1^T(t) K_2(t) x$ .
3. Нахождение управления по выходу и моделирование уравнений замкнутой системы.

*1 вариант* (управление системой с произвольными возмущениями)

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t), \quad x(0) = 0, \quad y(t) = C(t)x(t),$$

первый подход:

$$u(t) = u^*(t, y(t)) = -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) C^T(t) [C(t) C^T(t)]^{-1} y(t);$$

второй подход:

$$u(t) = u^*(t, \hat{x}(t)) = -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) \hat{x}(t),$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = x_0^*;$$

при произвольных ограниченных возмущениях  $w(t)$ , удовлетворяющих условию

$$\int_0^{t_1} \|w(t)\|^2 dt \leq 1.$$



2 вариант (управление системой с наилучшими возмущениями для каждой реализации)

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t), \quad x(0) = 0, \quad y(t) = C(t)x(t),$$

первый подход:

$$u(t) = u^*(t, y(t)) = -Q^{-1}(t)B_2^T(t)K_2(t)C^T(t)[C(t)C^T(t)]^{-1}y(t);$$

второй подход:

$$u(t) = u^*(t, \hat{x}(t)) = -Q^{-1}(t)B_2^T(t)K_2(t)\hat{x}(t),$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = x_0^*;$$

$$w(t) = w^*(t, x(t)) = \frac{1}{\gamma^2}B_1^T(t)K_2(t)x(t).$$

### Пример

Рассмотрим в качестве примера задачу стабилизации самолёта F-16,  $n = 5$ ,  $q = 1$ ,  $m = 1$ ,  $r = 1$ . Тогда математическая модель объекта описывается следующими матрицами, используемыми в уравнении (1):

$$A = \begin{pmatrix} -1,01887 & 0,90506 & -0,00215 & 0 & 0 \\ 0,82225 & -1,07741 & -0,17555 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20,2 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ -16,26 & -0,9788 & 0,4852 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20,2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица уравнения измерительной системы (2) имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 57,2958 & 0 \\ 0 & 57,2958 & 0 & 0 & 0 \\ -16,26 & -0,9788 & 0,4852 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор состояния  $x = (x_1, \dots, x_5)^T$ , где  $x_1$  - угол атаки,  $x_2$  - угловая скорость изменения угла тангажа,  $x_3$  - угол поворота привода,  $x_4$  - пропущенное через фильтр значение измеренного угла атаки,  $x_5$  - ошибка обработки входного сигнала.

Матрицы  $Q$  и  $S$  в (3) подбираются таким образом, чтобы обеспечивать корректный расчет управления с обратной связью. Подобранные матрицы представлены в табл. 1.



Таблица 1

**Параметры моделирования**

Начальные условия $x(0)^T$	(0, 1; 1; 0, 05; 0, 1; 0, 01)
S	$\begin{pmatrix} 0,001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,018 & -0,0001349 & 0 \\ 0 & -0,0001349 & 0,997 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$
Q	0,0001
$T = [0; t_1]$	[0; 10]
Внешние возмущения	$w(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ или } t > t_w \\ 1, & 0 \leq t \leq t_w, \quad t_w = 1 \end{cases}$

Также важно выбрать минимальное значение параметра  $\gamma$ , которое удовлетворяет (3) и при этом гарантирует выполнение свойства асимптотической устойчивости замкнутой системы.

Результаты решения с разными значениями параметров представлены в табл. 2, где  $\sigma$  – спектр матрицы. Как видно из табл. 2, параметр  $\gamma = 0.03$  является подходящим значением параметра  $\gamma$ . Для каждого рассмотренного случая выполняется условие  $K_2 \geq 0$ .

Таблица 2

**Результаты при разных значениях параметра  $\gamma$**

$\gamma$	$\sigma(K_2)$	$\sigma(A + [\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 Q^{-1} B_2^T] K_2)$
0,1	$\begin{pmatrix} 0,0060 \\ 0,3276 \\ 21,8337 \\ 31,8139 \\ 148,5508 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -46,8213 \\ -1,2618 + 2,0651i \\ -1,2618 - 2,0651i \\ -9,6591 \\ -10,0023 \end{pmatrix}$
0,05	$\begin{pmatrix} 0,0062 \\ 0,3276 \\ 21,9850 \\ 32,2481 \\ 151,5567 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -45,3037 \\ -1,2613 + 2,0645i \\ -1,2613 - 2,0645i \\ -9,6064 \\ -10,0019 \end{pmatrix}$



$\gamma$	$\sigma(K_2)$	$\sigma(A + [\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 Q^{-1} B_2^T] K_2)$
0,04	$\begin{pmatrix} 0,0062 \\ 0,3276 \\ 22,1066 \\ 32,6181 \\ 154,1427 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -44,1324 \\ -1,2608 + 2,0639i \\ -1,2608 - 2,0639i \\ -9,5613 \\ -10,0017 \end{pmatrix}$
0,03	$\begin{pmatrix} 0,0065 \\ 0,3276 \\ 22,3977 \\ 33,5860 \\ 161,0255 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -41,4937 \\ -1,2594 + 2,0624i \\ -1,2594 - 2,0624i \\ -9,4429 \\ -10,0013 \end{pmatrix}$
0,02	$\begin{pmatrix} 0,0074 \\ 0,3277 \\ 23,5853 \\ 38,9587 \\ 203,1142 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -32,8905 \\ -1,2514 + 2,0528i \\ -1,2514 - 2,0528i \\ -8,7809 \\ -10,0006 \end{pmatrix}$

Рассмотрим первый подход, который связан с нахождением псевдорешения линейной модели измерительной системы и его использованием в управлении. На рис. 1 представлены результаты запуска для системы с произвольными внешними возмущениями, которые удовлетворяют условию  $\int_0^t \|w(t)\|^2 dt \leq 1$ .

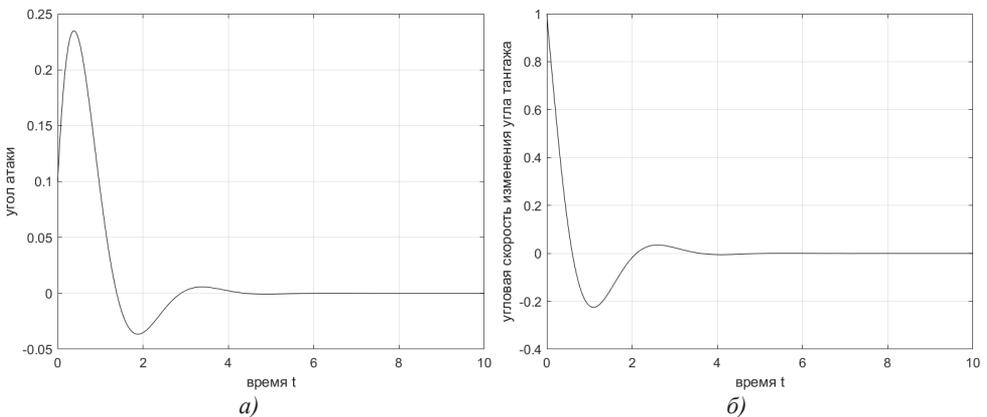


Рис.1. Первый подход, произвольные возмущения а – изменение угла атаки, б – изменение угловой скорости изменения угла тангажа



На рис. 2 можно наблюдать результат запуска для второго варианта, когда на систему воздействуют наихудшие внешние возмущения:  $w(t) = w^*(x(t)) = \frac{1}{\gamma^2} B_1^T K_2 x(t)$ .

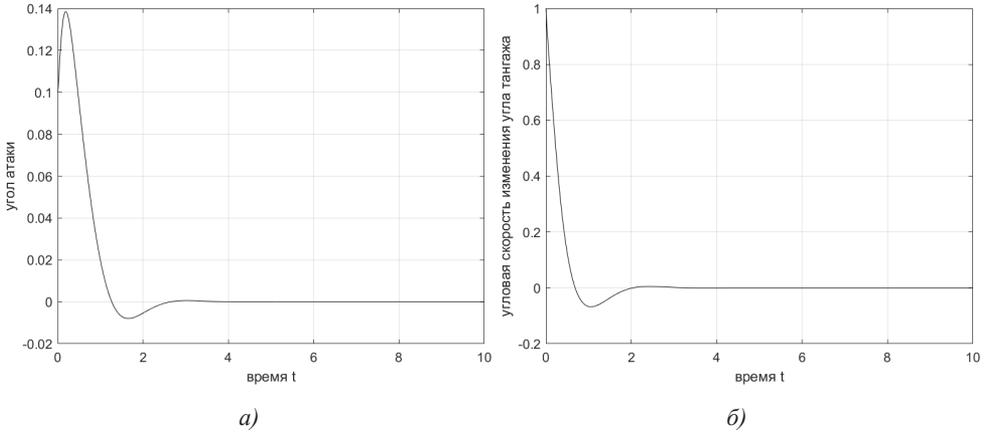


Рис. 2. Первый подход, наихудшие возмущения а – изменение угла атаки, б – изменение угловой скорости изменения угла тангажа

Аналогичные графики переходных процессов приведены на рис. 3–4 для второго подхода, который состоит в синтезе наблюдателя состояния, вырабатывающего оценку вектора состояния, и последующем использовании полученной оценки в управлении.

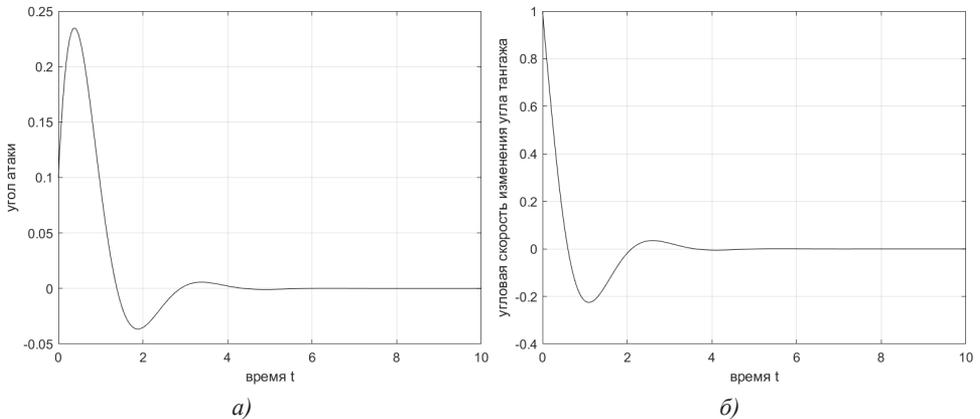


Рис. 3. Второй подход, произвольные возмущения а – изменение угла атаки, б – изменение угловой скорости изменения угла тангажа

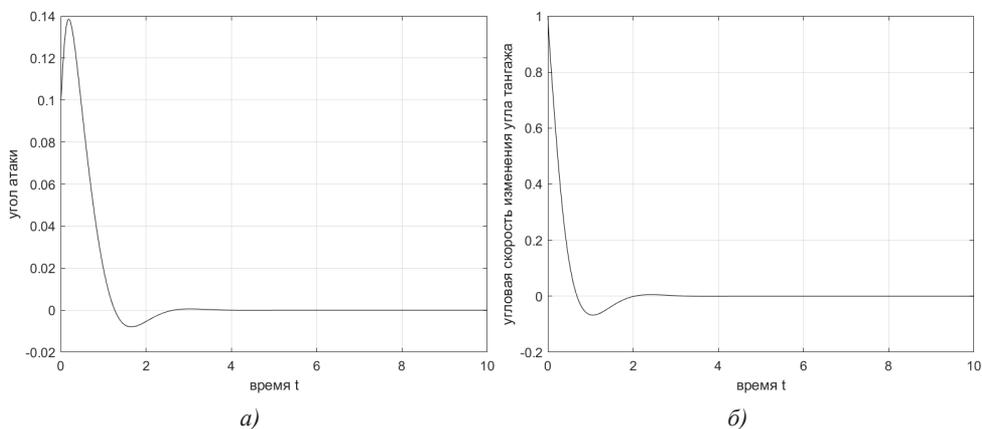


Рис. 4. Второй подход, наихудшие возмущения – изменение угла атаки,  
б – изменение угловой скорости изменения угла тангажа

Для произведения вычислений и моделирования использовалась математическая среда MATLAB. На основании рис. 1–4 можно сделать вывод, что оба подхода порождают в целом сравнимые результаты. Каждый из предложенных подходов и вариантов с различными внешними возмущениями обеспечивает асимптотическую устойчивость системы и желаемое качество переходных процессов. Отсюда можно сделать вывод, что каждый из подходов можно использовать при решении прикладных задач. Результаты моделирования свидетельствуют о том, что матрицы в критерии качества  $S$ ,  $Q$  и параметр  $\gamma$  были правильно подобраны. Однако, достаточно большое время, необходимое для достижения переходными процессами нулевых значений, указывает на необходимость детального исследования влияния параметров на свойства полученной замкнутой системы.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения данной работы сформулированы и доказаны достаточные условия  $H_\infty$  – управления на конечном промежутке времени, предложены два приближенных подхода нахождения законов управления в условиях неполной информации о векторе состояния, обеспечиваемой измерительной системой. Предложенные подходы были проверены на модельном примере стабилизации самолета. На основании полученных результатов можно сделать вывод, что предложенный алгоритм синтеза линейного  $H_\infty$  – регулятора обеспечивает желаемое качество переходных процессов и асимптотическую устойчивость замкнутых систем для каждого из подходов. Полученное управление позволяет парировать влияние внешних воздействий на систему, что было проверено на примере ограниченных произвольных и наихудших возмущений. Предложенные методы могут быть применены к различным задачам управления, например, при проектировании автопилотов или систем автоматической навигации летательных аппаратов.



### ***Литература***

1. *Koobloch H.W., Isidori A., Flockerzi D.* Topics in control theory // DMV-Seminar; Bd. 22, Basel ; Springer, 1993.
2. *Doyle J., Francis B., Tannenbaum A.* Feedback Control Theory // Macmillan Publishing Co, 1990.
3. *Skogestad S., Postlethwaite I.* Multivariable Feedback Control: Analysis and Design // John Wiley and sons, 2005.
4. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление // М.: Наука, 2002.
5. *Panteleev A.V. and Yakovleva A.A.* Approximate methods for H-infinity output feedback control // IOP Conf. Ser. Vol.927(1), 2020.
6. *Green M., Limebeer D.J.N.* Linear Robast Control // Dover Publications, 2012.
7. *Panteleev A.V., Yakovleva A.A.* An Airplane Stabilization Control by H-Inf Approach // «2020 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon)» DOI: 10.1109/FarEastCon50210.2020.9271615
8. *Gadewadikar J., Lewis F.L., Abu-Khalaf M.* Necessary and Sufficient Conditions for H-infinity Static Output-Feedback Control // Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol.29, No. 4, 2006.



## Synthesis of H-Infinity Controllers in a Finite Time Interval

**Andrei V. Panteleev\***

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>

e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

**Aleksandra A. Yakovleva\*\***

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

e-mail: [ayakovleva982@gmail.com](mailto:ayakovleva982@gmail.com)

The article considers a problem of stabilization of an aircraft, which can be solved by finding output control. Sufficient conditions for H-inf- output control for linear dynamic systems are obtained. Two approximate methods of closed-loop systems synthesis are proposed. The first one is based on finding a pseudo-inverse matrix of the linear measuring system model. The second one based on synthesizing an asymptotic observer, which allows to formulate an estimate of a state vector, giving a possibility of further use of the obtained estimate in the control law. The paper contains a step-by-step algorithm of finding an H-inf -control of a closed-loop system.

**Keywords:** linear regulator,  $H_\infty$  – control, closed loop control, airplane stabilization, algorithm, software, finite time interval

### For citation:

Panteleev A.V., Yakovleva A.A. Synthesis of H-infinity Controllers in a Finite Time Interval. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 1, pp. 5–19 . DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110101> (In Russ., abstr. in Engl.).

### References

1. Koobloch H.W., Isidori A., Flockerzi D. Topics in control theory // DMV-Seminar; Bd. 22, Basel; Springer, 1993.
2. Doyle J., Francis B., Tannenbaum A. Feedback Control Theory // Macmillan Publishing Co, 1990.
3. Skogestad S., Postlethwaite I. Multivariable Feedback Control: Analysis and Design // John Wiley and sons, 2005.
4. Polyak B.T., Scherbakov P.S. Robastnaya ustojchivost' i upravlenie [Robust stability and control]. Moscow: Nauka Publ., 2002.
5. Panteleev A.V. and Yakovleva A.A. Approximate methods for H-infinity output feedback control. IOP Conf. Ser. Vol.927(1), 2020.

\***Andrei V. Panteleev**, D.Sc. (Physical and Mathematical Sciences), Full Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute of Information Technology and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

\*\***Aleksandra A. Yakovleva**, Master Student, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia, e-mail: [ayakovleva982@gmail.com](mailto:ayakovleva982@gmail.com)



6. Green M., Limebeer D.J.N. Linear Robast Control // Dover Publications, 2012.
7. Pantelev A.V., Yakovleva A.A. An Airplane Stabilization Control by H-Inf Approach // «2020 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon)» DOI: 10.1109/FarEastCon50210.2020.9271615
8. Gadewadikar J., Lewis F.L., Abu-Khalaf M. Necessary and Sufficient Conditions for H-infinity Static Output-Feedback Control // Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol.29, No. 4, 2006.