

## О различных подходах к решению экстремальных задач

**Куланин Е.Д.\***

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>  
e-mail: [lucas03@mail.ru](mailto:lucas03@mail.ru)

**Нуркаева И.М.\*\***

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1949-6734>  
e-mail: [nurkaevaim@yandex.ru](mailto:nurkaevaim@yandex.ru)

**Степанов М.Е.\*\*\***

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>  
e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)

В статье рассматриваются геометрический и аналитический методы решения известных экстремальных задач и выявляются логические взаимосвязи между этими задачами, предпочтительность применения того или другого метода решения экстремальных задач показывается на конкретных примерах.

**Ключевые слова:** Экстремальные задачи, точка Лемуана, точка Люилье, изогональность, центроид, метод множителей Лагранжа, треугольник, тетраэдр.

### Для цитаты:

Куланин Е.Д., Нуркаева И.М., Степанов М.Е. О различных подходах к решению экстремальных задач // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 1. С. 40–60.  
DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110104>

\***Куланин Евгений Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: [lucas03@mail.ru](mailto:lucas03@mail.ru)

\*\***Нуркаева Ирина Михайловна**, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1949-6734>, e-mail: [nurkaevaim@yandex.ru](mailto:nurkaevaim@yandex.ru)

\*\*\***Степанов Михаил Евграфович**, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)



## 1. ВВЕДЕНИЕ

Авторы статьи продолжают тему, связанную с решением экстремальных задач и рассмотренную в статьях авторов ([1] – [2]). Решение экстремальных задач является важной областью работы со студентами. Дело в том, что экстремальные задачи занимают центральное место в современной математике. Кроме того, решение таких задач может основываться на самых разных подходах. Речь может идти как об элементарно-геометрических методах, так и на методах высшей математики. Благодаря этому обстоятельству изучение методов решения экстремальных задач может строиться на основе различных теоретических и методических основаниях.

Важным обстоятельством, которое позволяет связать выработать единую точку зрения на различные методы решения экстремальных задач, является то обстоятельство, что различные задачи часто объединяются одним и тем же местом действия, а именно евклидовой плоскостью или трёхмерным евклидовым пространством. Именно по этой причине здесь уместны как методы классической геометрии, так и методы аналитической геометрии и математического анализа. Книга Р. Декарта «Геометрия» направила геометрию по новому направлению. Итогом реализации картезианской программы стали аналитическая геометрия, математический анализ функций одной переменной, дифференциальная геометрия, теория дифференциальных уравнений. Каждая из этих взаимосвязанных теорий позволяет глубже понять геометрию плоскости.

Для выявления глубоких связей между различными геометрическими теориями необходимо искать различные точки зрения на геометрию евклидовой плоскости. В данной статье как раз и делается подобная попытка.

Авторы последовательно рассматривают элементарно-геометрические методы решения экстремальных задач, а также методы, связанные с аналитической геометрией и математическим анализом. При этом используется подход, изложенный в статье [6].

Здесь рассматривается вопрос об использовании образа силового поля для разработки методики преподавания математики. Та же точка зрения может успешно использоваться при изучении геометрических объектов различного рода.

Суть этого подхода такова. Пусть задано некоторое множество  $M$ , тогда скалярным полем (аналог силового поля) на этом множестве называется функция  $F: M \rightarrow R$ , где  $R$  – множество действительных чисел. Графическим представлением (графиком) того же самого поля назовём множество пар  $(m, F(m))$ , принадлежащих прямому произведению  $M \times R$ . Суперпозицией нескольких скалярных полей  $F_1, F_2, \dots, F_n$  является сумма этих функций.

Поле может просто постулироваться заданием числовой функции на множестве  $M$ . Однако, если  $M$  является метрическим пространством, а  $\Phi$  – некоторая фигура в  $M$ , то метрика индуцирует поле расстояний от произвольной точки из  $M$  до  $\Phi$ . Это поле можно модифицировать, применив к его значениям функцию действительного переменного. Если в  $M$  задано несколько фигур, то мы получим несколько скалярных полей и можем рассмотреть их суперпозицию. Возможны и иные способы



задания скалярных полей в метрических пространствах, например, зависящие от специфических свойств фигуры  $\Phi$ . В статье рассматривается только случай, когда  $M$  – евклидова плоскость, а графическое представление поля является поверхностью в трёхмерном пространстве.

Фактически речь идёт о том, что наличие на плоскости или в пространстве геометрических фигур индуцирует те или иные поля, и в результате естественным образом возникают экстремальные задачи различного характера. Более того, возникает возможность использования образа соответствующего поля в учебных целях. При этом построение визуальных характеристик поля (линий уровня и линий стока) может использоваться вычислительный эксперимент.

Совместное рассмотрение классического метода решения экстремальной задачи и образа силового поля позволяет совершенно иными глазами посмотреть на проблему в целом.

Следует признать, что предлагаемый подход нельзя рассматривать как некий хорошо обкатанный методический приём. Скорее речь идёт о поиске новых связей между хорошо известными теориями и методиками, ранее воспринимавшимися как обособленные.

Ещё одним важным обстоятельством является тот факт, что современное математическое образование должно опираться на поддержку компьютерных технологий. В нашем случае именно вычислительные программы позволяют создавать визуальные образы силовых полей, а также прояснять наличие связей между структурой этих полей и сущностью методов решения экстремальных задач.

В силу соображений, изложенных нами выше, предлагаемая статья распадается на несколько разделов различного характера. И первый из них посвящён элементарно-геометрическим методам решения экстремальных задач.

## 2. ЭЛЕМЕНТАРНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим сначала следующую задачу.

**Задача 1.** В плоскости треугольника найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин треугольника минимальна.

Эту задачу легко решить элементарно-геометрическими методами. Пусть  $G$  – центроид (точка пересечения медиан треугольника)  $ABC$ . Покажем, что векторная сумма  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}$  равна нулю, т.е.  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .

По правилу параллелограмма  $\vec{GA} + \vec{GC} = \vec{GD}$  (рис. 1). Диагонали параллелограмма  $AGCD$  пересекаются в середине  $M$  стороны  $AC$ , поэтому  $\vec{GD} = 2\vec{GM}$ .

С другой стороны, поскольку медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины, то  $\vec{BG} = 2\vec{GM}$  и  $\vec{GB} = -2\vec{GM}$ , откуда получаем:  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = (\vec{GA} + \vec{GC}) + \vec{GB} = \vec{GD} + \vec{GB} = 2\vec{GM} - 2\vec{GM} = \vec{0}$ , что и требовалось доказать.

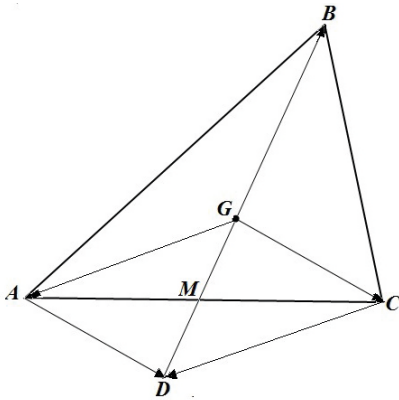


Рис. 1.

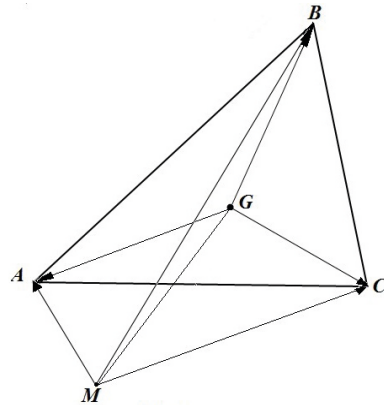


Рис. 2.

Пусть теперь  $M$  – произвольная точка плоскости треугольника  $ABC$ . Нам нужно минимизировать сумму  $MA^2 + MB^2 + MC^2$ . Заменяя квадраты расстояний  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  скалярными квадратами векторов  $\overline{MA}$ ,  $\overline{MB}$ ,  $\overline{MC}$ , получим:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = (\overline{MG} + \overline{GA})^2 + (\overline{MG} + \overline{GB})^2 + (\overline{MG} + \overline{GC})^2 = \overline{MG}^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GA} + \overline{GA}^2 + \overline{MG}^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GB} + \overline{GB}^2 + \overline{MG}^2 + 2\overline{MG} \cdot \overline{GC} + \overline{GC}^2 =$$

$$= 3\overline{MG}^2 + 2\overline{MG} \cdot (\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}) + \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 = 3\overline{MG}^2 + \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2,$$

поскольку  $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$ .

Итак,

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 3\overline{MG}^2 + \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \geq, GA^2 + GB^2 + GC^2$$

причем равенство достигается только в случае совпадения точки  $M$  с центроидом треугольника  $ABC$ , поэтому центроид  $G$  минимизирует сумму  $MA^2 + MB^2 + MC^2$ . Для демонстрации аналитического способа решения задачи введем систему координат, в которой точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $M$  будут иметь координаты  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ ,  $C(x_3; y_3)$ ,  $M(x; y)$  (рис. 3).

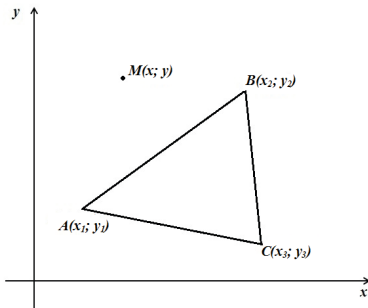


Рис. 3.

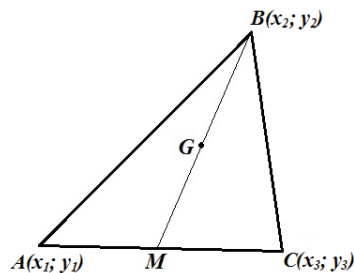


Рис. 4.

Применив формулу расстояния между двумя точками, имеем:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 +$$



$+(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = f(x, y)$ . Приравнявая нулю частные производные функции  $f(x, y)$ , получим:

$$f'_x = 2(x - x_1 + x - x_2 + x - x_3) = 2(3x - x_1 - x_2 - x_3) = 0,$$

$$f'_y = 2(y - y_1 + y - y_2 + y - y_3) = 2(3y - y_1 - y_2 - y_3) = 0$$

$$\text{откуда } x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3).$$

Убедимся в том, что полученные формулы задают координаты центра тяжести треугольника ABC. В самом деле, пусть M – середина отрезка AC,  $G(x; y)$  – центр тяжести треугольника ABC (рис. 4). Тогда  $M\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_3); \frac{1}{2}(y_1 + y_3)\right)$  и  $\overline{BC} = 2\overline{GM}$  или  $(x - x_2, y - y_2) = 2\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_3) - x; \frac{1}{2}(y_1 + y_3) - y\right) = (x_1 + x_3 - 2x, y_1 + y_3 - 2y)$ ,

$$\text{откуда } x - x_2 = x_1 + x_3 - 2x, x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3),$$

$$y - y_2 = y_1 + y_3 - 2y, y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \text{ что и требовалось.}$$

Заметим, что если геометрическое решение данной задачи доступно старшеклассникам и может рассматриваться в качестве пропедевтики решения экстремальных задач, то для понимания аналитического решения необходимо знание основ математического анализа, изучаемого на младших курсах ВУЗов соответствующего профиля.

Перейдем теперь к рассмотрению пространственного варианта нашей задачи.

**Задача 2.** Найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин тетраэдра минимальна.

Попробуем решить эту задачу аналогично решению задачи 1. Если обозначить через ABCD данный тетраэдр, то сначала надо найти точку M такую, что  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \vec{0}$ .

Утверждение 1. Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней, пересекаются в одной точке G и делятся этой точкой в отношении 3:1, считая от вершины тетраэдра. Эти отрезки называются медианами тетраэдра, а точка G называется центроидом тетраэдра.

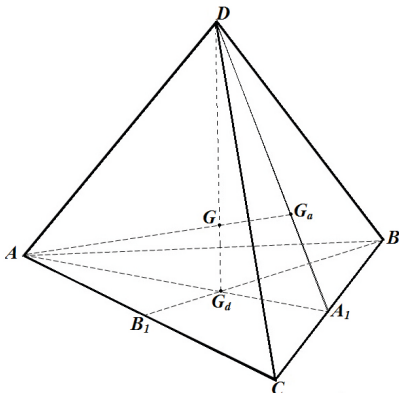


Рис. 5.

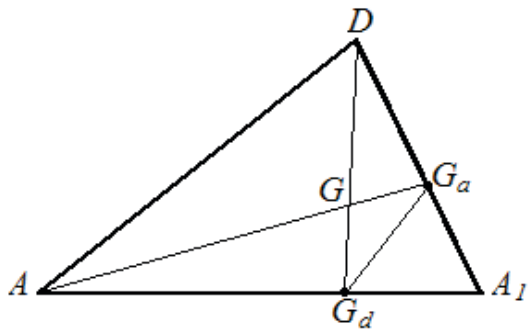


Рис. 6.



Доказательство. Пусть  $G_a$  и  $G_d$  – центры тяжести граней BCD и ABC соответственно, G – точка пересечения отрезков  $AG_a$  и  $DG_d$  (рис. 5). Тогда  $G_aG_d \parallel AD$ , откуда  $\Delta AGD \sim \Delta G_aGG_d$  и  $\frac{AG}{GG_a} = \frac{DG}{GG_d} = \frac{AD}{G_aG_d} = 3$  (рис. 6), поскольку  $\frac{DG_a}{G_aA_1} = \frac{AG_d}{G_dA_1} = 2$ .

Очевидно, что отрезки  $BG_b$  и  $CG_c$ , где  $G_b$  и  $G_c$  – центры тяжести граней ACD и ABD, также делят отрезок  $DG_d$  в отношении 3:1, считая от точки D и, таким образом, пересекаются в точке G. Покажем теперь, что  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ . Так как  $\overrightarrow{DG} = 3\overrightarrow{GG_d}$ , то для этого достаточно показать, что  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GG_d}$ .

Сложим векторы  $\overrightarrow{GA}$ ,  $\overrightarrow{GB}$ ,  $\overrightarrow{GC}$  по правилу параллелепипеда:  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GE_2}$  (рис. 7). Поскольку диагональ  $GE_2$  параллелепипеда лежит в каждой из плоскостей  $GEE_2C$ ,  $GA_2E_2B$ ,  $GB_2E_2A$  диагональных сечений параллелепипеда, то прямая  $GE_2$  пересекает плоскость ABC в точке пересечения медиан треугольника ABC, т.е. в центре тяжести  $G_d$ . Пусть  $G'_a$  – точка пересечения плоскости, проходящей через точку  $G_d$  параллельно грани  $GBB_2C$ , с ребром GA параллелепипеда,  $M_a$  – середина ребра GA. Точки  $G'_b$  и  $G'_c$  определим аналогично точке  $G'_a$ . Тогда

$\overrightarrow{GG'_a} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GM_a} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GA}$ . Аналогично,  $\overrightarrow{GG'_b} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GB}$ ,  $\overrightarrow{GG'_c} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GC}$ . По правилу параллелепипеда  $\overrightarrow{GG'_a} + \overrightarrow{GG'_b} + \overrightarrow{GG'_c} = \overrightarrow{GG_d}$ , поэтому

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3(\overrightarrow{GG'_a} + \overrightarrow{GG'_b} + \overrightarrow{GG'_c}) = 3\overrightarrow{GG_d}$ , что и требовалось доказать.

Наконец-то мы можем по аналогии с решением задачи 1 завершить решение задачи 2:

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = (\overline{MG} + \overline{GA})^2 + \\ &+ (\overline{MG} + \overline{GB})^2 + (\overline{MG} + \overline{GC})^2 + (\overline{MG} + \overline{GD})^2 = 4\overline{MG}^2 + 2\overline{MG} \cdot (\overline{GA} + \overline{GB} + \\ &+ \overline{GC} + \overline{GD}) + \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + \overline{GD}^2 = 4\overline{MG}^2 + \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + \overline{GD}^2 \geq \\ &\overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + \overline{GD}^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2. \end{aligned}$$

Итак,  $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$ , причем равенство достигается только в случае совпадения точки M с точкой G, т.е. центроид G тетраэдра ABCD минимизирует сумму квадратов расстояний  $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$  от точки M до его вершин A, B, C, D.

Пусть точки M, A, B, C, D имеют следующие координаты:  $M(x; y; z)$ ,  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ ,  $C(x_3; y_3; z_3)$ ,  $D(x_4; y_4; z_4)$ . Тогда сумма квадратов расстояний от точки M до вершин тетраэдра ABCD запишется следующим образом:  $g(x, y, z) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 + (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2$ . Приравняв нулю частные производные функции  $g(x; y; z)$ , получим:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}.$$

Рассуждая по аналогии с плоским случаем, можно показать, что точка с такими координатами совпадает с центроидом G тетраэдра ABCD.

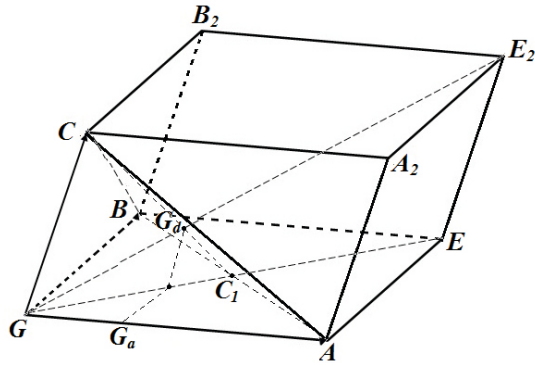


Рис. 7.

Перейдем к рассмотрению следующей задачи, в некотором смысле двойственной задаче 1.

**Задача 3.** В плоскости треугольника найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до прямых, содержащих стороны треугольника, минимальна.

Решение. Опустим из точки  $M$  перпендикуляры  $MA_1, MB_1, MC_1$  на прямые  $BC, CA, AB$  соответственно и обозначим  $\overline{MA_1} = \bar{x}, MA_1 = x, \overline{MB_1} = \bar{y}, MB_1 = y, \overline{MC_1} = \bar{z}, MC_1 = z$  (рис. 8).

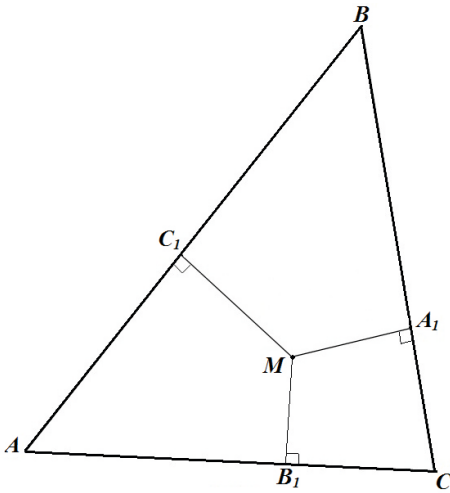


Рис. 8.

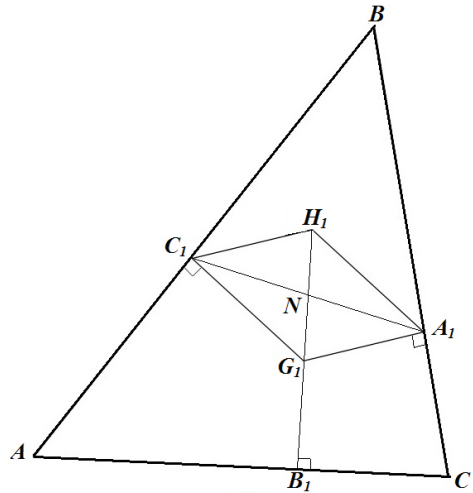


Рис. 9.

$$\text{Тогда } MA_1^2 + MB_1^2 + MC_1^2 = \overline{MA_1}^2 + \overline{MB_1}^2 + \overline{MC_1}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 =$$

$$(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})^2 - 2\bar{x}\bar{y} - 2\bar{y}\bar{z} - 2\bar{z}\bar{x} \geq -2(\bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{z} + \bar{z}\bar{x}), \text{ причём равенство}$$

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = -2(\bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{z} + \bar{z}\bar{x}) \text{ достигается в том и только в том случае, когда}$$

$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = 0$ , т.е. в случае, когда  $M$  совпадает с центроидом  $G_1$  треугольника  $A_1B_1C_1$ . Установим расположение точки  $G_1$  по отношению к треугольнику  $ABC$ . Пусть  $H_1 -$

точка, симметричная  $G_1$  относительно середины  $N$  отрезка  $A_1C_1$  (рис. 9). Тогда четырехугольник  $A_1H_1C_1G_1$  – параллелограмм, причем  $G_1A_1 \perp BC$ ,  $A_1H_1 \perp AB$ ,  $H_1G_1 \perp AC$ , поскольку  $A_1H_1 \parallel G_1C_1$ , а отрезок  $H_1G_1$  лежит на прямой  $G_1B_1$ , перпендикулярной  $AC$ . Тогда стороны треугольника  $G_1A_1H_1$  перпендикулярны сторонам треугольника  $ABC$ , откуда следует, что углы этих треугольников равны, и, таким образом,  $\triangle H_1A_1G_1 \sim \triangle ABC$ , откуда получаем:

$$\frac{A_1G_1}{BC} = \frac{G_1H_1}{CA} = \frac{H_1A_1}{AB} = k, \text{ или } A_1G_1 = ka, G_1H_1 = kb, H_1A_1 = kc,$$

где  $a, b, c$  – длины сторон  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$ .

Но  $G_1H_1 = 2G_1N = G_1B_1$ , так как  $G_1$  – точка пересечения медиан треугольника  $A_1B_1C_1$ .

Итак,  $G_1A_1 = ka$ ,  $G_1B_1 = kb$ ,  $G_1C_1 = kc$ , т.е. расстояния от точки  $G_1$  до сторон треугольника  $ABC$  пропорциональны длинам соответствующих сторон этого треугольника.

Заметим, что, так как центр описанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$  совпадает с серединой отрезка  $G_1B$  ( $\angle G_1A_1B = \angle G_1C_1B = 90^\circ$ ), а  $H_1$  – ортоцентр этого треугольника ( $A_1H_1 \perp AB, H_1C_1 \perp BC$ ), то  $\angle G_1BA_1 = \angle H_1BC_1$  (рис. 10), т.е. прямые  $G_1B$  и  $H_1B$  изогональны (см. [1], [2]).

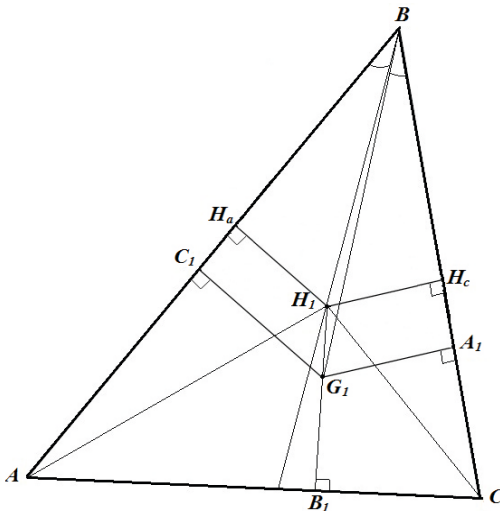


Рис. 10.

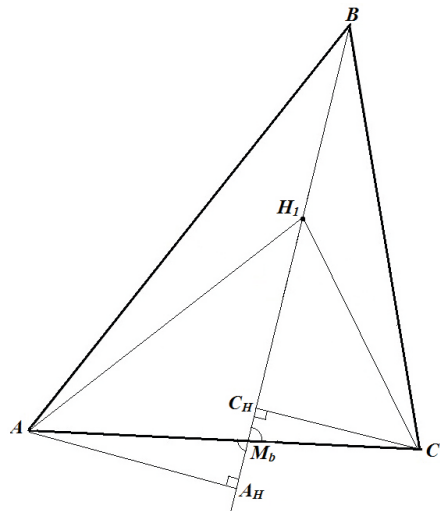


Рис. 11.

Рассмотрим отношение площадей треугольников  $AH_1B$  и  $CH_1B$ :

$$\frac{S_{AH_1B}}{S_{CH_1B}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot H_1H_c}{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot H_1H_a} = \frac{c}{a} \cdot \frac{H_1H_c}{H_1H_a} = \frac{c}{a} \cdot \frac{C_1H_1 \cos B}{A_1H_1 \cos B} = \frac{c}{a} \cdot \frac{G_1A_1}{G_1C_1} = \frac{c}{a} \cdot \frac{ka}{kc} = 1.$$

Через точки  $A$  и  $C$  проведем перпендикуляры  $AA_n$  и  $CC_n$  к прямой  $BH_1$  (рис. 11).

Тогда  $S_{AH_1B} = \frac{1}{2}BH_1 \cdot AA_n = \frac{1}{2}BH_1 \cdot CC_n = S_{CH_1B}$ , откуда  $AA_n = CC_n$  и из равен-





ства прямоугольных треугольников  $AA_H M_b$  и  $CC_H M_b$ , выводим, что прямая  $BH_1$  пересекает сторону  $AC$  в ее середине  $M_b$ , т.е. точка  $H_1$  лежит на медиане  $BM_b$  треугольника  $ABC$ .

Другими словами, прямая  $BG_1$  изогональна медиане  $BM_b$  треугольника  $ABC$ . Совершенно аналогично можно установить, что прямые  $AG_1$  и  $CG_1$  изогональны медианам  $AM_a$  и  $CM_c$  соответственно. Таким образом, точка  $G_1$  изогонально сопряжена центру  $G$  треугольника  $ABC$ . Эта точка называется точкой Лемуана в честь французского математика Эмиля Лемуана (1840–1912), опубликовавшего в 1873 г. доказательство существования этой точки и обозначается буквой  $L$  (также широко распространено обозначение  $K$ ).

Заметим, что до Лемуана в 1847 г. эту точку исследовал немецкий математик Греббе (1804–1874), а еще раньше, в 1809 г., французский математик Люилье (1750–1840) открыл только что рассмотренное свойство этой точки [4]. Так что в контексте нашей задачи логичней было бы называть точку Лемуана точкой Люилье. В дальнейшем мы увидим, что аналогичная точка в пространстве называется точкой Люилье, т.е. в пространственном варианте рассмотренной задачи историческая справедливость все-таки восторжествовала.

На самом деле, определить положение точки  $L$  легче всего с помощью следующего утверждения, называемого теоремой Шлемильха.

Утверждение 2. Три прямые, проходящие через середины сторон треугольника и середины, проведенных к ним высот, пересекаются в точке Лемуана этого треугольника.

Доказательство. В решении задачи 3 было показано, что точка  $H_1$ , симметричная точке  $L$  (на рис. 9 точка  $L$  обозначена как  $G_1$ ) относительно середины  $N$  отрезка  $A_1D_1$ , лежит на медиане  $BM_b$  треугольника  $ABC$  (рис. 12). Так как  $L$  – точка пересечения медиан треугольника  $A_1B_1C_1$ , то  $B_1L = 2LN = LH_1$ , т.е.  $L$  совпадает с серединой отрезка  $B_1H_1$ , но при гомотетии с центром в  $M_b$ , переводящей  $H_1$  в  $B$ , точка  $L$  переходит в середину  $S_b$  высоты  $BH_b$ . Точно так же можно показать, что отрезки  $M_aS_a$  и  $M_cS_c$ , где  $M_a$  и  $M_c$  – середины сторон  $BC$  и  $BA$ , а  $S_a$  и  $S_c$  – середины высот  $AH_a$  и  $CH_c$ , проходят через точку Лемуана  $L$ .

Вернемся однако к задаче 3. Обозначим, как и раньше, расстояния от точки  $M$  до сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$  через  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно (рис. 13.).

Рассмотрим выражение

$$(x - ka)^2 + (y - kb)^2 + (z - kc)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2k(ax + by + cz) + k^2(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x - ka)^2 + (y - kb)^2 + (z - kc)^2 + 2k(ax + by + cz) - k^2(a^2 + b^2 + c^2) \geq$$

$$2k(ax + by + cz) - k^2(x^2 + y^2 + z^2),$$

причем равенство достигается только при  $x = ka, y = kb, z = kc$ . Коэффициент  $k$  находится из равенства площадей:

$$S_{BMC} + S_{CMA} + S_{AMB} = S_{ABC} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}by + \frac{1}{2}cz = S,$$

$$ax + by + cz = 2S, \tag{1}$$

$k(a^2 + b^2 + c^2) = 2S, \quad k = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}$ . Ясно, что полученная точка совпадает с точкой Лемуана  $L$ .

Однако, приведенное решение, безупречное с математической точки зрения, все же педагогически ущербно, поскольку оно использует предположение о пропорци-

ональности расстояний от искомой точки соответствующим сторонам треугольника без всяких объяснений того, откуда взялось это предположение.

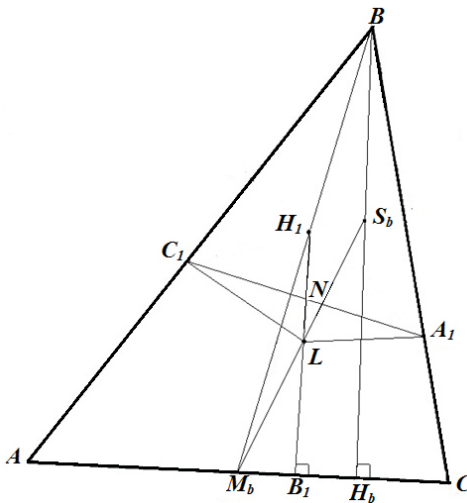


Рис. 12.

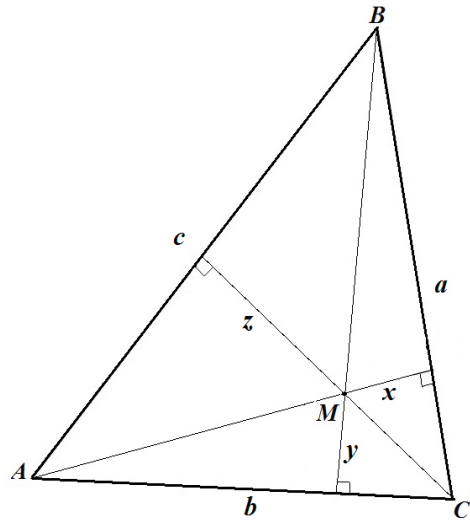


Рис. 13.

Приведем еще одно решение, использующее метод множителей Лагранжа. Запишем целевую функцию  $u(x, y, z)$  нашей задачи и добавим к ней уравнение связи (1). Получим следующую формализацию задачи:

$$u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \min$$

$$ax + by + cz = 2S, \text{ или } ax + by + cz - 2S = 0.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, z) = u(x, y, z) + \lambda(ax + by + cz - 2S) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(ax + by + cz - 2S).$$

Теперь приравняем нулю частные производные функции Лагранжа:

$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_z = 0, \end{cases} \begin{cases} 2x + \lambda a = 0, \\ 2y + \lambda b = 0, \\ 2z + \lambda c = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Выразив  $-\frac{\lambda}{2}$  из уравнений (2), получим:

$$-\frac{\lambda}{2} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k, \text{ откуда } x = ka, y = kb, z = kc.$$

где  $k$  находится из уравнения связи (1) после подстановки в него значений  $x = ka, y = kb, z = kc$ :  $a \cdot ka + b \cdot kb + c \cdot kc = 2S$ ;

$$k(a^2 + b^2 + c^2) = 2S, \quad k = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Естественно, что приведенное аналитическое решение дает тот же результат, что и предыдущее решения.

Осталось рассмотреть пространственный вариант задачи 3.



**Задача 4.** Найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до плоскостей, содержащих грани данного тетраэдра, минимальна.

Прежде чем приступить к решению задачи 4, давайте еще раз проанализируем решение задачи 3. Введем векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , совпадающие со сторонами треугольника ABC:  $\vec{a} = \overline{BC}, \vec{b} = \overline{CA}, \vec{c} = \overline{AB}$  (рис. 14 а). Тогда  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} = \vec{0}$ . После поворота треугольника ABC на  $90^\circ$  по часовой стрелке он примет положение  $A_1B_1C_1$  стороны которого перпендикулярны сторонам треугольника ABC (рис. 14 б).

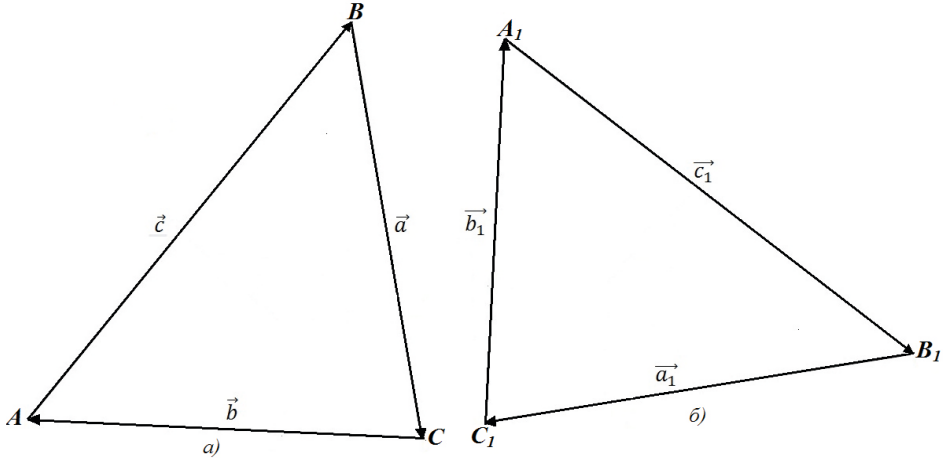


Рис. 14.

Естественно, что при этом сохраняется равенство  $\vec{a}_1 + \vec{b}_1 + \vec{c}_1 = \vec{0}$  (2). Отложим векторы  $\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1$  от точки Лемуана L треугольника ABC (рис. 15 а) и сделаем гомотегию с центром L и коэффициентом  $k = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}$  (рис. 15 б).

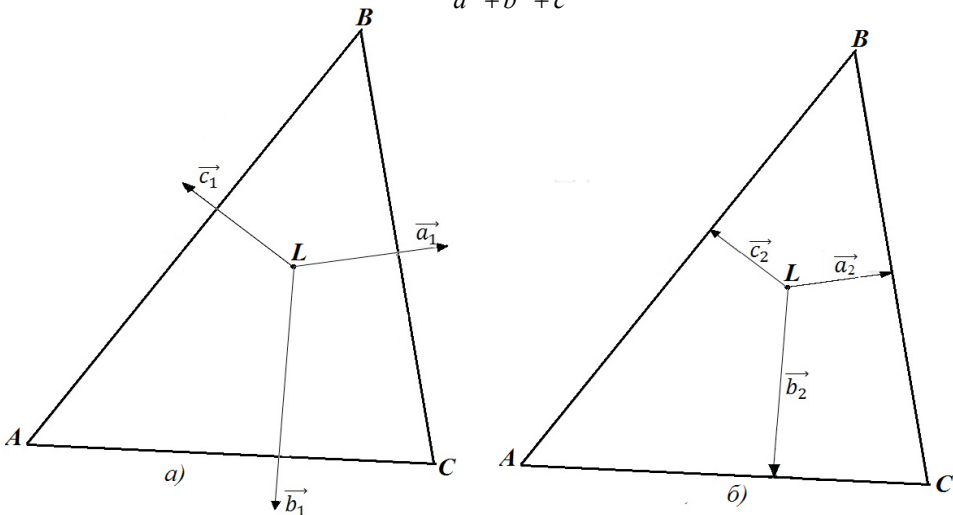


Рис. 15.



Умножив равенство (2) на коэффициент гомотетии  $k = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}$  получим  $k\vec{a}_1 + k\vec{b}_1 + k\vec{c}_1 = \vec{0}$  или  $\vec{a}_2 + \vec{b}_2 + \vec{c}_2 = \vec{0}$ , где  $\vec{a}_2 = k\vec{a}_1$ ,  $\vec{b}_2 = k\vec{b}_1$ ,  $\vec{c}_2 = k\vec{c}_1$ .

Проводя рассуждения в обратном порядке, получим, что если расстояния от некоторой точки до стороны треугольника пропорциональны сторонам этого треугольника, то эта точка является центроидом своего треугольника проекций, поскольку сумма векторов, проведенных из этой точки в вершины треугольника проекций, равна нулю. Фактически, мы еще раз доказали характеристическое свойство точки Лемуана: сумма квадратов расстояний от точки до прямых, содержащих стороны треугольника, минимальна тогда и только тогда, когда эта точка совпадает с центроидом своего треугольника проекций.

Попробуем реализовать намеченную программу для решения задачи 4. Аналогом длин сторон треугольника являются площади граней тетраэдра. Значит, вместо векторов, перпендикулярных сторонам треугольника, модули которых равны этим сторонам, надо рассмотреть векторы, перпендикулярные его граням, с модулями, равными площадям этих граней.

Утверждение 3. Пусть векторы  $\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{n}_c, \vec{n}_d$  перпендикулярны соответственно граням BCD, CDA, DAB, BAC тетраэдра ABCD, направлены в его внешнюю область и имеют модули, равные площадям соответствующих граней тетраэдра. Тогда  $\vec{n}_a + \vec{n}_b + \vec{n}_c + \vec{n}_d = \vec{0}$ .

Доказательство. Обозначим  $\vec{DA} = \vec{a}, \vec{DB} = \vec{b}, \vec{DC} = \vec{c}$  и пусть векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют правую тройку как на рис. 16.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \vec{n}_1 &= \frac{1}{2} \vec{c} \times \vec{b}, \vec{n}_2 = \frac{1}{2} \vec{a} \times \vec{c}, \vec{n}_3 = \frac{1}{2} \vec{b} \times \vec{a}, \vec{n}_4 = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \\ &= \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{2} (\vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{a}) = \frac{1}{2} (\vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a}), \text{ и} \\ \vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4 &= \frac{1}{2} (\vec{c} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{c} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a}) = \vec{0}, \text{ что и требовалось.} \end{aligned}$$

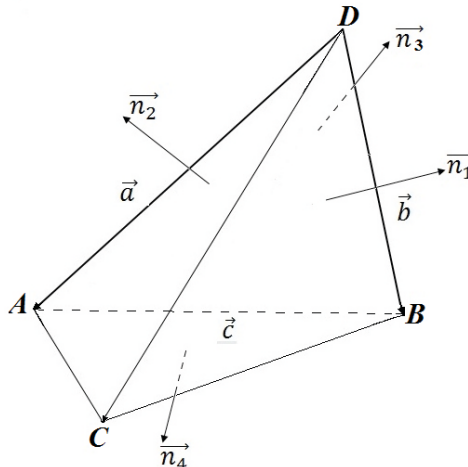


Рис. 16.



Как уже говорилось выше, точка, минимизирующая сумму квадратов расстояний от нее до плоскостей граней данного тетраэдра, называется точкой Люилье  $L$  этого тетраэдра.

Утверждение 4. Точка Люилье тетраэдра  $ABCD$  совпадает с центроидом ее тетраэдра проекций  $L_a L_b L_c L_d$  относительно тетраэдра  $ABCD$ .

Доказательство. Пусть  $L_a, L_b, L_c, L_d$  – проекции точки  $L$ ,  $M_a, M_b, M_c, M_d$  – проекции точки  $M$  соответственно на плоскости  $BCD, CDA, DAB, ABC$  соответственно. Тогда  $LL_a^2 + LL_b^2 + LL_c^2 + LL_d^2 \leq MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 + MM_d^2 \leq ML_a^2 + ML_b^2 + ML_c^2 + ML_d^2$ , причем равенство возможно только в случае совпадения точек  $L$  и  $M$ , т.е. точка  $L$  минимизирует сумму квадратов расстояний от точки  $M$  до вершин тетраэдра  $ABCD$  и поэтому согласно задаче 2 совпадает с центроидом тетраэдра  $L_a L_b L_c L_d$ , т.е.  $\overline{LL_a} + \overline{LL_b} + \overline{LL_c} + \overline{LL_d} = \vec{0}$ . Поскольку точка  $L$  определяется единственным образом и  $\overline{LL_a} + \overline{LL_b} + \overline{LL_c} + \overline{LL_d} = \vec{0}$ ,  $\overline{n_a} + \overline{n_b} + \overline{n_c} + \overline{n_d} = \vec{0}$ , то расстояния  $LL_a, LL_b, LL_c, LL_d$  пропорциональны модулям векторов  $n_a, n_b, n_c, n_d$ , т.е. площадям  $S_a, S_b, S_c, S_d$  граней  $BCD, CDA, DAB, BAC$  тетраэдра  $ABCD$ . Обозначив высоты тетраэдров  $LBCD, LCDA, LDAB, LBAC$  через  $x = LL_a, y = LL_b, z = LL_c, t = LL_d$ , найдем коэффициент пропорциональности  $k$ :  $V_{LBCD} + V_{LCDA} + V_{LDAB} + V_{LBAC} = V_{ABCD}$

$$\frac{1}{3} S_a x + \frac{1}{3} S_b y + \frac{1}{3} S_c z + \frac{1}{3} S_d t = V,$$

$$S_a \cdot k S_a + S_b \cdot k S_b + S_c \cdot k S_c + S_d \cdot k S_d = 3V,$$

$$k (S_a^2 + S_b^2 + S_c^2 + S_d^2) = 3V, \quad k = \frac{3V}{S_a^2 + S_b^2 + S_c^2 + S_d^2}.$$

Установить пропорциональность расстояний от точки Люилье до плоскостей граней тетраэдра площадям этих граней можно также следующим способом (плоский случай см. в [5]). Нам нужно найти минимум функции  $u(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ , где переменные  $x, y, z, t$  удовлетворяют следующему уравнению связи:

$$S_a x + S_b y + S_c z + S_d t - 3V = 0 \quad (3)$$

Целевая функция представляет собой квадрат расстояния от начала координат  $O(0, 0, 0, 0)$  до точки  $M(x, y, z, t)$ , лежащей в плоскости (3) четырехмерного пространства. Понятно поэтому, что расстояние от точки  $O$  до плоскости (3) равно модулю вектора  $\overline{OH}$ , коллинеарного нормальному вектору  $\vec{n}(S_a, S_b, S_c, S_d)$  плоскости (3), т.е.  $x = k S_a, y = k S_b, z = k S_c, t = k S_d$ .

Подставив эти значения  $x, y, z, t$  в уравнение (3) найдем коэффициент  $k$ :

$$k = \frac{3V}{S_a^2 + S_b^2 + S_c^2 + S_d^2}.$$

И, наконец, решим задачу 4 методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа для данной задачи имеет вид  $L(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + \lambda g(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + \lambda(S_a x + S_b y + S_c z + S_d t - 3V)$ . Приравнявая нулю частные производные функции Лагранжа, получим:

$$2x + \lambda S_a = 0, 2y + \lambda S_b = 0, 2z + \lambda S_c = 0, 2t + \lambda S_d = 0, \text{ откуда}$$

$$-\frac{\lambda}{2} = \frac{x}{S_a} = \frac{y}{S_b} = \frac{z}{S_c} = \frac{t}{S_d} = k,$$

т.е.  $x = kS_a, y = kS_b, z = kS_c, t = kS_d$ , где  $k = \frac{3V}{S_a^2 + S_b^2 + S_c^2 + S_d^2}$ . Очевидно, что найденная точка совпадает с найденной ранее точкой Люилье.

### 3. ПОЛЯ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ ТОЧКАМИ И ПРЯМЫМИ

Зададим на плоскости декартову систему координат. Расстояние  $z$  между точками  $M(x_0; y_0)$  и  $N(x; y)$  удовлетворяет уравнению  $z^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ . Если зафиксировать точку  $M$ , то будет индуцировано поле, графическое представление которого является конусом (рис.17).

Пусть прямая  $L$  перпендикулярна единичному вектору  $(\mathbf{a}; \mathbf{b})$  и проходит через точку  $A(x_1; y_1)$ . Нормальное уравнение прямой имеет вид

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_1) = 0.$$

Если  $N(x; y)$  ещё одна точка на плоскости, то расстояние от прямой  $L$  до точки  $N$  равно значению величины  $z = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_1)$ . Расстояние берётся со знаком, зависящим от того, в какой из полуплоскостей находится точка  $N$ . Отметим, что вектор, ортогональный к плоскости  $z = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_1)$  имеет координаты  $(\mathbf{a}; \mathbf{b}; -1)$ .

Сразу отметим, что в случае, когда рассматривается несколько прямых, линейная комбинация индуцируемых ими полей является линейной формой, в частности суперпозицией полей. В частности в статье [6] доказывается следующая теорема: линии стока суммы расстояний до сторон треугольника  $ABC$  параллельны прямой  $OI$ , где  $O$  и  $I$  – центры описанной и вписанной окружностей соответственно.

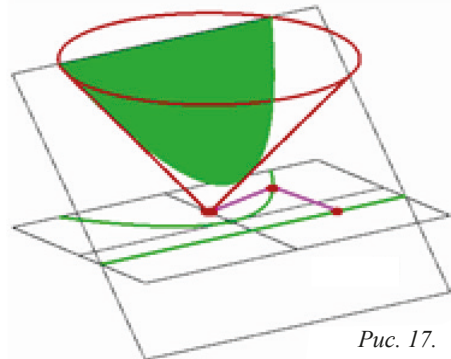


Рис. 17.

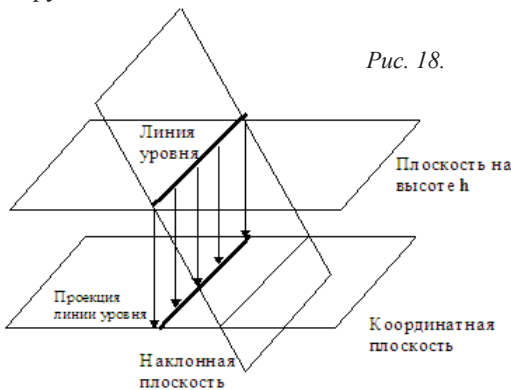


Рис. 18.

Поскольку данная теорема имеет очевидные связи с экстремальными задачами, приведём её доказательство.

Изложение ведётся в предположении, что учащемуся известны азы векторной алгебры, включая скалярное произведение на плоскости и в пространстве.

Если из точки  $(x_0; y_0; z_0)$  исходит базовый вектор  $(\mathbf{a}_1; \mathbf{b}_1; \mathbf{c}_1)$ , то концы всех перпендикулярных ему векторов с началом в  $(x_0; y_0; z_0)$  замечают пер-



пендикулярную ему плоскость. Условие перпендикулярности векторов  $(a_1; b_1; c_1)$  и  $(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$  состоит в равенстве нулю их скалярного произведения, т.е. имеет вид  $a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) + c_1(z - z_0) = 0$  или, после приведения свободных членов,  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ . В результате получен общий вид уравнения плоскости, расположенной в трёхмерном пространстве.

Обе части уравнения  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  можно умножить на число  $-1/c_1$  (если  $c_1$  не равно 0). В результате уравнение плоскости преобразуется к виду  $z = ax + by + d$ , а базовый вектор  $(a_1; b_1; c_1)$  переходит в вектор  $(a; b; -1)$ , где  $a = -a_1/c_1$ ,  $b = -b_1/c_1$ ,  $d = -d_1/c_1$ . Это явное выражение величины  $z$  как функции от двух переменных. Если положить  $z = \text{const}$ , то будут получены линии уровня, которые являются параллельными между собой прямыми. Перпендикулярные им прямые можно назвать линиями стока, поскольку именно по этому направлению наиболее быстро убывает или возрастает функция  $z$ .

Проекцией базового вектора  $(a; b; -1)$  на плоскость  $xOy$  является вектор  $(a; b)$ . Он указывает направление проекций линий стока на ту же плоскость. Поскольку точка  $(x_0; y_0; z_0)$  лежит на плоскости  $z = ax + by + d$ , верно равенство  $z_0 = ax_0 + by_0 + d$ . Сдвинемся из точки  $(x_0; y_0)$ , придав аргументам приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Тогда  $z + \Delta z = a(x + \Delta x) + b(y + \Delta y) + d$ . Отсюда вытекает, что приращение функции  $\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$ , т.е. скалярному произведению векторов  $(a; b)$  и  $(\Delta x; \Delta y)$ .

Каждая прямая на плоскости индуцирует поле расстояний до неё. Если в одной полуплоскости брать расстояние до прямой со знаком плюс, а в другой – со знаком минус, то графиком поля будет плоскость, наклонённая к исходной под углом  $45^\circ$ . Её линии уровня параллельны исходной прямой, а линии стока (градиента) ей перпендикулярны. Их направление можно задать единичным вектором  $(a; b)$ , перпендикулярным исходной прямой. Уравнение поля примет вид  $z = ax + by$ . Отметим, что выбор поля неоднозначен, т.к. знаки в полуплоскостях можно поменять.

Расстояние до сторон треугольника есть суперпозиция трёх скалярных полей, а её графическое представление тоже плоскость. Возможны несколько вариантов выбора исходных полей, но мы остановимся на том, при котором внутри треугольника все поля положительны. Рассмотрение других вариантов приводит к внеписанным окружностям.

Вектор линии стока суперпозиции равен сумме векторов трёх исходных полей. Действительно, пусть даны три поля  $z = a_i x + b_i y$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Их суперпозиция имеет уравнение  $z = (a_1 + a_2 + a_3)x + (b_1 + b_2 + b_3)y$ , что и соответствует суммированию векторов градиента.

**Теорема.** Сумма векторов  $OA_1$ ,  $OB_1$  и  $OC_1$  (рис. 19) равна вектору  $OI$ , где  $O$  и  $I$  – центры описанной и вписанной окружностей треугольника  $ABC$  соответственно. Иными словами линии стока суммы расстояний до сторон треугольника  $ABC$  параллельны прямой  $OI$ .

Доказательство теоремы является весьма простым (рис. 20). Сумма векторов  $OC_1$  и  $OA_1$  параллельна биссектрисе  $BB_1$ , поскольку  $A_1OC_1$  и  $ABC$  – углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Следовательно, конец вектора равного сумме всех трёх

векторов  $OA_1$ ,  $OB_1$  и  $OC_1$ , найденный по правилу параллелограмма, лежит на этой биссектрисе. Но если начать с векторов  $OA_1$  и  $OB_1$ , то конец этого же вектора, лежит на биссектрисе  $CC_1$ . Из этого следует, что конец вектора равного сумме всех трёх векторов  $OA_1$ ,  $OB_1$  и  $OC_1$  есть точка пересечения биссектрис. Отметим, что векторы  $OA_1$ ,  $OB_1$  и  $OC_1$  имеют длину  $R$ , поэтому для получения функции, реализующей именно расстояние, необходимо умножить каждый из этих векторов на число  $1/R$ .

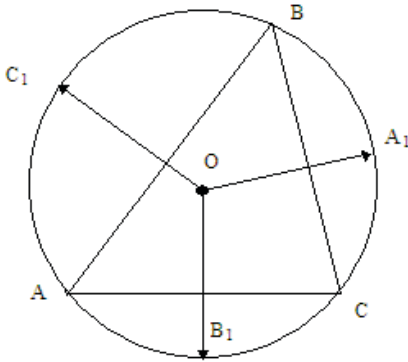


Рис. 19.

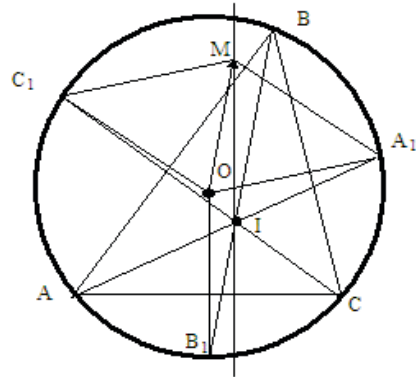


Рис. 20.

Теорема позволяет вписать в окружность треугольник с заданными направлениями сторон. Для этого нужно построить вектора  $OA_1$ ,  $OB_1$  и  $OC_1$ , сложить их (найти точку пересечения биссектрис  $I$ ) и, проведя биссектрисы  $IA_1$ ,  $IB_1$  и  $IC_1$  найти вершины треугольника.

Значение поля  $z_0$  в точке  $O$  равно  $R(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$ , где  $R$  – радиус описанной окружности, а  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  – углы треугольника, может быть вычислено с помощью скалярного квадрата вектора  $OI$ . Пусть  $|OI| = d$ , тогда согласно пункту 3 оба вектора  $(a; b)$  и  $(\Delta x; \Delta y)$  равны  $OI$ .  $OI^2 = d^2 = (OA_1 + OB_1 + OC_1)^2 = 3R^2 - 2R^2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$ . Окончательно,  $z_0 = (3R^2 - d^2) / 2R$ .

Вдоль вектора  $OI$  поле убывает на  $d^2 / R$ . Следовательно, значение поля в точке  $I$  равно  $3r = (3R^2 - 3d^2) / 2R$ , где  $r$  – радиус вписанной окружности, т.е.  $r = (R^2 - d^2) / 2R$ .

Рассмотрим окружность  $\omega_1$  радиуса  $R$  с центром  $O$  и впишем в неё треугольник  $A_0B_0C_0$ . В него в свою очередь впишем окружность  $\omega_2$  с центром  $I$  и радиусом  $r$ . Расстояние  $OI$  обозначим через  $d$ . На окружности  $\omega_1$  выберем произвольную точку  $A$ . После этого на той же окружности  $\omega_1$  легко найти точки  $B$  и  $C$ , такие, что сумма векторов  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  равна  $OI$ . Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , по доказанному имеет центр в точке  $I$ . Кроме того, её радиус вычисляется однозначно по  $R$  и  $d$ , т.е. равен  $r$ . Итак, окружности, вписанные в треугольники  $ABC$  и  $A_0B_0C_0$ , совпадают.

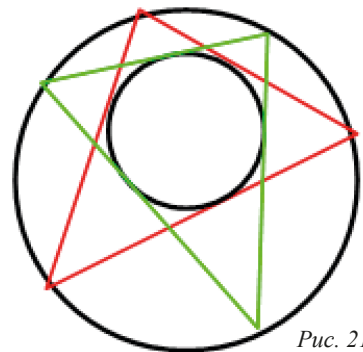


Рис. 21.





Мы получили частный случай поризмы Понселе [7]. Рассмотрим вписанную и описанную окружности некоторого треугольника. Взяв на первой из них произвольную точку А, проведём хорду АВ, касающуюся вписанной окружности, затем касающуюся её хорду ВС, а в заключении хорду CD. Тогда точки А и D совпадут (рис. 21).

#### 4. КРИВЫЕ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ПОЛЯМИ НА ДЕКАРТОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрение двух или нескольких объектов, среди которых есть порождающие нелинейные поля, приводит к естественному появлению на плоскости различных кривых, прежде всего, кривых второго порядка.

Одно из определений параболы таково: геометрическое место точек равноудалённых от точки А и прямой L. Пусть точка А имеет координаты (0; 1), а прямая L – уравнение  $y + 1 = 0$ . Индуцированные ими поля описываются уравнениями:  $z^2 = x^2 + (y - 1)^2$  и  $z = y + 1$ . Парабола является проекцией на координатную плоскость линии пересечения соответствующих поверхностей:  $x^2 + (y - 1)^2 = (y + 1)^2$ . Таким образом, одновременно получено уравнение параболы  $y = \frac{1}{4}x^2$  и намечен путь для доказательства того, что парабола является коническим сечением.

Другие кривые второго порядка появляются, когда одно из полей индуцируется несколькими прямыми. Например, если рассмотреть поле индуцируемое двумя прямыми  $L_1$  и  $L_2$ , пересекающимися в точке  $A(x_1; y_1)$  и ортогональными к единичным векторам  $(a_1; b_1)$  и  $(a_2; b_2)$ , то оно является суммой полей  $z = a_1 \cdot (x - x_1) + b_1 \cdot (y - y_1)$  и  $z = a_2 \cdot (x - x_1) + b_2 \cdot (y - y_1)$ . Таким образом, это поле представляется плоскостью  $z = (a_1 + a_2) \cdot (x - x_1) + (b_1 + b_2) \cdot (y - y_1)$ . Легко понять, что линии стока и линии уровня параллельны биссектрисам углов, образованных прямыми  $L_1$  и  $L_2$  (рис. 22).

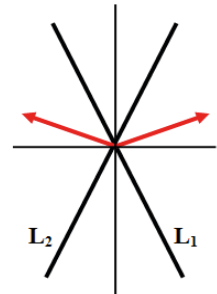


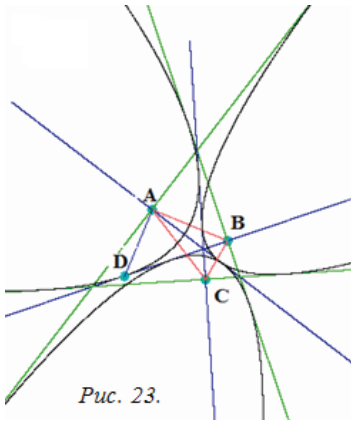
Рис. 22.

Определим вид геометрического места точек  $N(x; y)$  таких, что расстояние MN до точки  $M(x_0; y_0)$  равно сумме расстояний от N до прямых  $L_1$  и  $L_2$ . Положим, что  $x_0 = 0$  и  $y_0 = 1$ . Кроме того, пусть уравнения прямых  $L_1$  и  $L_2$  имеют вид  $y = k \cdot x$  и  $y = -k \cdot x$ , или в нормальном виде  $\pm \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}} x - \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} y = 0$ .

Индуцированное точкой M поле задаётся уравнением  $z^2 = x^2 + (y - 1)^2$ . Индуцированное прямыми  $L_1$  и  $L_2$  поле описывается уравнением  $z = -\frac{2}{\sqrt{k^2 + 1}} y$ . Искомое геометрическое место точек является проекцией на координатную плоскость линии пересечения соответствующих поверхностей:  $x^2 + (y - 1)^2 = \frac{4}{k^2 + 1} y^2$ . После преобразований получаем уравнение  $x^2 \pm p^2 y^2 - 2y + 1 = 0$ , где  $p^2 = \pm$ , в зависимости от знака выражения. При  $k = \sqrt{3}$  искомое геометрическое место точек является параболой. В противном случае уравнение приобретает либо вид  $x^2 + (py - 1/p)^2 = 1/p^2 - 1$  (при  $k > \sqrt{3}$ ,

когда  $p^2 = \frac{k^2 - 3}{k^2 + 1}$ ), то есть описывает эллипс, либо вид  $(py + 1/p)^2 - x^2 = 1 + 1/p^2$  (при  $k < \sqrt{3}$ , когда  $p^2 = -\frac{k^2 - 3}{k^2 + 1}$ ), то есть описывает гиперболу.

Если рассмотреть с этих позиций треугольник – фигуру, связанную с множеством замечательных точек и прямых, то каждая пара объектов вида точка – прямая порождает параболу.



Прежде всего, естественно рассмотреть каждую из вершин треугольника и её противоположную сторону. В результате будут получены три параболы. Докажем, что в треугольнике ABC парабола, индуцированная вершиной A и противоположной ей стороной BC касается биссектрис треугольника, проходящих через вершины B и C (рис. 23).

Осью симметрии упомянутой параболы является высота треугольника, опущенная из вершины A на сторону BC. Очевидно, что биссектрисы внутренних углов треугольника, проходящие через вершины B и C, не параллельны оси симметрии параболы. Но для прямых, обладающих этим свойством, верно следу-

ющее утверждение: если прямая не параллельна оси симметрии параболы и имеет с ней единственную общую точку, то она касается данной параболы.

Все точки биссектрисы BD равноудалены от сторон треугольника AB и BC. Если из точки A восстановить к стороне AB перпендикуляр, то точка D его пересечения с биссектрисой BD – единственная точка этой биссектрисы равноудалённая от точки A и стороны BC. Итак, D единственная точка биссектрисы, лежащая на параболе. Таким образом, парабола и биссектриса касаются друг друга. Точно такие же рассуждения показывают, что параболы касаются не только биссектрис внутренних, но и внешних углов треугольника.

Из этого факта легко получить следующее утверждение: если треугольник ABC является правильным, то соответствующие параболы касаются друг друга в точках, лежащих на описанной окружности (рис. 24).

Поскольку для треугольника характерна группировка прямых по три: три стороны, три медианы, три высоты и т.д., возникают разнообразные возможности рассмотрения полей, индуцированных тремя прямыми и точкой. В качестве примера можно привести геометрическое место точек, среднее арифметическое расстояний от каждой из которых до сторон треугольника равно расстоянию до точки пересечения биссектрис.

Мы, однако, рассмотрим более сложную конструкцию. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. Выберем на плоскости произвольную точку M. Прямые AM, BM и CM называются чевианами. Чевианы, пересекающиеся в точке M, и точка O индуцируют два скалярных поля. Пересечение соответствующих поверхностей – плоскости и конуса, является кривой второго порядка, одна из полуосей



которой указывает направление убывания поля чевиан. Проекция соответствующей полуоси на плоскость треугольника ABC, рассматриваемая как вектор, может быть перенесена в точку M. Таким образом, каждой точке плоскости сопоставлен вектор, то есть получено векторное поле.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассматриваются различные подходы к решению экстремальных задач геометрического характера, в частности элементарно-геометрические методы. Кроме того, описывается подход, связанный с рассмотрением аналогов силовых полей, индуцируемых различными геометрическими фигурами. Объём статьи не позволил затронуть даже тот ряд вопросов, которые выявляют взаимосвязь упомянутых подходов. По этой причине авторы предполагают написание новой статьи, являющейся продолжением данной публикации.

### *Литература*

1. Куланин Е.Д., Нуркаева И.М. О двух геометрических задачах на экстремум // Математика в школе. М., 2019. № 4. – С. 35–40.
2. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики. // Моделирование и анализ данных. 2019. № 4. – С. 127–144.
3. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Роль образного мышления в научном мышлении. // Моделирование и анализ данных. 2020. – Т. 10. – № 2, С. 110–128.
4. Понарин Я.П. Элементарная геометрия: в 2 т. – т. 2: Стереометрия, преобразования пространства. – М.: МЦНМО, 2006.
5. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие. – 6-е изд., стереотипн. – М.: МЦНМО, 2007, С. 282–283.
6. Степанов М.Е. Образ силового поля как эвристическая модель в математике». Моделирование и анализ данных. Труды факультета информационных технологий МГППУ. – 2007, Вып. 3.
7. Прасолов В.В., Тихомиров В.М. Геометрия. – М.: МЦНМО, 1997.



## On Different Approaches to Solving Extreme Problems

### ***Yevgeny D. Kulanin\****

Moscow state University of Psychology & Education, Moscow, Russia  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>  
e-mail: [lucas03@mail.ru](mailto:lucas03@mail.ru)

### ***Irina M. Nurkaeva\*\****

Moscow state University of Psychology & Education, Moscow, Russia  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1949-6734>  
e-mail: [nurkaevaim@yandex.ru](mailto:nurkaevaim@yandex.ru)

### ***Mikhail E. Stepanov\*\*\****

Moscow state University of Psychology & Education, Moscow, Russia  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>  
e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)

The article discusses the geometric and analytical methods for solving known extreme problems and identifies the logical relationships between these problems, the preference for using one or another method for solving extreme problems is shown by specific examples.

**Keywords:** Extreme problems, Lemoine point, Lhuillier point, isogonality, centroid, Lagrange multiplier method, triangle, tetrahedron.

### **For citation:**

Kulanin Y.D., Nurkaeva I.M., Stepanov M.E. On Different Approaches to Solving Extreme Problems. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 1, pp. 40–60. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110104> (In Russ., abstr. in Engl.).

### **References**

1. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. On two geometric problems on the extremum // *Mathematics in School. M.*, 2019. No. 4. – pp. 35–40.
2. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. Propaedeutics of solving extreme problems in the school course of mathematics. // *Data modeling and analysis*. 2019. No. 4. – pp. 127–144.

\****Yevgeny D. Kulanin***, candidate of physical and mathematical Sciences, Professor, Moscow state University of Psychology & Education, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: [lucas03@mail.ru](mailto:lucas03@mail.ru)

\*\****Irina M. Nurkaeva***, candidate of pedagogical Sciences, associate Professor, Moscow state University of Psychology & Education, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1949-6734>, e-mail: [nurkaevaim@yandex.ru](mailto:nurkaevaim@yandex.ru)

\*\*\****Mikhail E. Stepanov***, candidate of pedagogical Sciences, associate Professor, Moscow state University of Psychology & Education, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)



3. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. The role of figurative thinking in scientific thinking. // Data modeling and analysis. 2020. – vol. 10. – No. 2, pp. 110–128.
4. Ponarin Y.P. Elementary geometry: in 2 t. – T. 2: solid geometry, transform space. – M.: MCNMO, 2006.
5. Prasolov V.V. Problems of plane geometry: a tutorial. – 6th ed. stereotype. – M.: MCNMO, 2007. – pp. 282–283.
6. Stepanov M.E. The image of the force field as a heuristic model in mathematics”. Data modeling and analysis. Proceedings of the Faculty of Information Technologies of MSPPU. – 2007, Issue 3.
7. Prasolov V.V., Tikhomirov V.M. Geometry. MCNMO, 1997.