Моделирование и анализ данных
2020. Том 10. № 1. С. 129–139
DOI: 10.17759/mda.2020100108
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2020. Vol 10, no. 1, pp. 129–139
DOI: 10.17759/mda.2020100108
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

УДК 519.61

Программное обеспечение решения полностью нечетких систем линейных уравнений с прямоугольной матрицей системы

Пантелеев А.В.*
МАИ (национальный исследовательский университет), Москва, Россия,
e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Савельева В.С.**
МАИ (национальный исследовательский университет), Москва, Россия,
e-mail: verassavel@mail.ru

В статье рассматривается проблема решения полностью нечеткой линейной системы уравнений с нечеткой прямоугольной матрицей и нечеткой правой частью, описываемых с помощью нечетких треугольных чисел в форме отклонений от среднего значения. Сформирован алгоритм решения на основе нахождения псевдорешений систем линейных уравнений и соответствующее программное обеспечение. Приведены примеры, иллюстрирующие применение созданного программного обеспечения.

Ключевые слова: нечеткие числа, полностью нечеткая линейная система уравнений, треугольные числа, псевдообратная матрица, псевдорешение.

Для цитаты:
Пантелеев А.В., Савельева В.С. Программное обеспечение решения полностью нечетких систем линейных уравнений с прямоугольной матрицей системы // Моделирование и анализ данных. 2020. Том 10. № 1. С. 129–139. DOI: 10.17759/mda.2020100108

***Пантелеев Андрей Владимирович,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики факультета «Информационные технологии и прикладная математика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), Москва, Россия, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

****Савельева Вера Сергеевна,** студент бакалавриата факультета «Информационные технологии и прикладная математика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), Москва, Россия, e-mail: verassavel@mail.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

На практике при задании элементов матриц, описывающих математическую модель в инженерных и экономических задачах, информация может быть размытой, т.е. представляться некоторым отрезком возможных значений. Более того, возможен случай, когда задается четкое значение и границы отрицательного и положительного изменений относительно четкого значения. В этом случае можно описать элементы матриц с помощью нечетких чисел и операций над ними, в частности треугольных чисел. Численному значению из интервала возможных значений ставится в соответствие степень уверенности, которая в теории нечетких множеств задается так называемыми функциями принадлежности [10; 12; 14]. Одним из возможных типов функций принадлежности являются треугольные, которые задают треугольные числа.

Наибольшее распространение в инженерных и экономических расчетах получили линейные модели, описываемые системами линейных уравнений. В случае неопределенности параметров матрицы системы и вектора ее правых частей система линейных уравнений трактуется как полностью нечеткая, решение которой ищется в классе треугольных нечетких чисел [10; 12]. Различные методы решения таких систем предложены в [3; 6; 7; 8; 9; 11; 13; 14]. Авторами сформирован алгоритм решения полностью нечеткой системы уравнений в случае прямоугольной матрицы системы, который реализован в виде программного обеспечения, эффективность которого продемонстрирована в ходе анализа решений модельных примеров. Программное обеспечение процесса решения нечетких линейных систем с нечеткой правой частью и с нечеткой квадратной матрицей системы описаны в [4; 5].

Приведем основные определения, которые будут использоваться при составлении нечеткой математической модели [10;12].

1. Треугольное нечеткое число $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)$ задается функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{m-x}{\alpha}, m-\alpha \le x < m, \ \ \alpha > 0, \\ 1 - \dfrac{x-m}{\beta}, m \le x \le m+\beta, \ \ \beta > 0, \\ \text{0, в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1}$$

Число $\tilde{0} = (0,0,0)$ считается нулевым треугольным нечетким числом.

2. Нечеткое число $\tilde{A}$ называется положительным ($\tilde{A} > 0$), если его функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0 \ \forall x \le 0$, и отрицательным ($\tilde{A} < 0$), если его функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0 \ \forall x \ge 0$. Число $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)$ является положительным, если $m - \alpha \ge 0$.
3. Два нечетких треугольных числа $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)$ и $\tilde{N} = (n, \gamma, \delta)$ равны тогда и только тогда, когда
$$m = n, \alpha = \gamma, \beta = \delta \ . \tag{2}$$
4. Суммой двух нечетких треугольных чисел $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)$ и $\tilde{N} = (n, \gamma, \delta)$ называется число

$$(m,\alpha,\beta)\oplus(n,\gamma,\delta)=(m+n,\alpha+\gamma,\beta+\delta)\,. \tag{3}$$

5. Произведение двух положительных нечетких чисел $\tilde{M}=(m,\alpha,\beta)>0$ и $\tilde{N}=(n,\gamma,\delta)>0$ при малых значениях α,β по сравнению с m и малых γ,δ по сравнению с n приближенно определяется, как нечеткое число вида

$$(m,\alpha,\beta)\otimes(n,\gamma,\delta)\cong(mn,m\gamma+n\alpha,m\delta+n\beta)\,. \tag{4}$$

В частном случае умножения на четкое число λ:

$$\lambda\otimes(m,\alpha,\beta)=\begin{cases}(\lambda m,\lambda\alpha,\lambda\beta),\lambda>0,\\(\lambda m,-\lambda\beta,-\lambda\alpha),\lambda<0.\end{cases} \tag{5}$$

Когда разброс, характеризуемый α,β и γ,δ, не является малым, может быть использована более точная формула умножения:

$$(m,\alpha,\beta)\otimes(n,\gamma,\delta)\cong(mn,m\gamma+n\alpha-\alpha\gamma,m\delta+n\beta+\beta\delta)\,. \tag{6}$$

6. Матрица $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})$ называется нечеткой, если каждый ее элемент представляется нечетким числом.

Нечеткая матрица называется положительной ($\tilde{A}>\tilde{0}$), если каждый ее элемент (нечеткое число) положителен. Аналогично определяются неотрицательные, отрицательные, неположительные нечеткие матрицы.

Нечеткая матрица может быть представлена в форме $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})=((a_{ij},\alpha_{ij},\beta_{ij}))$, или $\tilde{A}=(A,M,N)$, где $A=(a_{ij}),M(\alpha_{ij}),N(\beta_{ij})$ – три матрицы с четкими элементами.

7. Система вида

$$\tilde{A}\otimes\tilde{x}=\tilde{b} \tag{7}$$

с нечеткой прямоугольной матрицей $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})$, $i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n$ и нечеткой матрицей $\tilde{b}=(\tilde{b}_j)$ размеров $m\times 1$ называется полностью нечеткой линейной системой. В расширенной форме ее можно переписать

$$(\tilde{a}_{11}\otimes\tilde{x}_1)\oplus\ldots\oplus(\tilde{a}_{1n}\otimes\tilde{x}_n)=\tilde{b}_1,$$

$$(\tilde{a}_{21}\otimes\tilde{x}_1)\oplus\ldots\oplus(\tilde{a}_{2n}\otimes\tilde{x}_n)=\tilde{b}_2,$$

$$\vdots$$

$$(\tilde{a}_{m1}\otimes\tilde{x}_1)\oplus\ldots\oplus(\tilde{a}_{mn}\otimes\tilde{x}_n)=\tilde{b}_m.$$

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ПОЛНОСТЬЮ НЕЧЕТКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В [10] предложен метод нахождения положительного решения $\tilde{x}=(x,y,z)>\tilde{0}$ полностью нечеткой линейной системы $\tilde{A}\times\tilde{x}=\tilde{b}$ с $\tilde{A}=(A,M,N)>\tilde{0}$, матрица A невырожденная, $\tilde{b}=(b,g,h)>\tilde{0}$ при выполнении предположений о малых значениях α,β по сравнению с m и малых γ,δ по сравнению с n:

$$
\begin{aligned}
&x = A^{-1}b, \\
&y = A^{-1}(g - Mx), \\
&z = A^{-1}(h - Nx).
\end{aligned} \tag{8}
$$

или $x = A^{-1}b, y = A^{-1}(g - MA^{-1}b), z = A^{-1}(h - NA^{-1}b)$. Для получения решения $\tilde{x} = (x, y, z) > \tilde{0}$ требуется последовательно применить формулы в (8).

В [11] сформулированы условия, при которых полностью нечеткая система имеет положительное решение: матрица A невырожденная; $A^{-1}(E + MA^{-1})b \geq A^{-1}h$; $A^{-1}h \geq A^{-1}(MA^{-1})b$; $A^{-1}g \geq A^{-1}NA^{-1}b$. Эти условия заменили более жесткие, предложенные в [8].

Если матрица A прямоугольная, в [13] получены формулы для случая, если $\tilde{A}-$ неотрицательная нечеткая матрица, $\tilde{x}-$ неотрицательный нечеткий вектор, $\tilde{b}-$ известный нечеткий вектор:

$$
\begin{aligned}
&x = A^{\sim 1}b, \\
&y = A^{\sim 1}(g - Mx), \\
&z = A^{\sim 1}(h - Nx),
\end{aligned} \tag{9}
$$

где $A^{\sim 1}-$ псевдообратная матрица [1], а $x = A^{\sim 1}b-$ псевдорешение системы $Ax = b$, т.е. наименьший по модулю $\left|x\right| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ столбец x среди всех столбцов, минимизирующих величину $\left|Ax - b\right|$.

Если $\tilde{A}-$ неотрицательная нечеткая матрица, $\tilde{b}-$ неотрицательный нечеткий вектор, псевдообратная матрица $A^{\sim 1}$ неотрицательная, а также выполняются условия: $h \geq NA^{\sim 1}b,\ \ g \geq MA^{\sim 1}b,\ \ (E + MA^{\sim 1})b \geq g$, то система (7) имеет неотрицательное нечеткое минимальное решение, удовлетворяющее условиям $y \geq 0,\ \ z \geq 0,\ \ x - y \geq 0$ и имеющее среди всех возможных решений наименьшую величину евклидовой нормы [13].

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПОЛНОСТЬЮ НЕЧЕТКОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

1. Задать матрицы системы $\tilde{A} = (A, M, N) > \tilde{0}$ и правой части $\tilde{b} = (b, g, h) > \tilde{0}$, где $\tilde{A}-$ неотрицательная нечеткая матрица, $\tilde{b}-$ неотрицательный нечеткий вектор,
2. Найти псевдообратную матрицу $A^{\sim 1}$, проверить, что она неотрицательная. Если $A-$ матрица размеров $(r \times n)$, то при $r < n$ и $\operatorname{rg} A = r$ псевдообратная матрица находится по формуле $A^{\sim 1} = A^T(AA^T)^{-1}$, а при $r > n$ и $\operatorname{rg} A = n$ по формуле $A^{\sim 1} = (A^T A)^{-1} A^T$. В общем случае можно применить метод Гревилля, метод элементарных преобразований блочной матрицы, метод скелетного разложения [1].
3. Проверить выполнение условий существования неотрицательного нечеткого решения системы: $h \geq NA^{\sim 1}b,\ \ g \geq MA^{\sim 1}b,\ \ (E + MA^{\sim 1})b \geq g$. Если оно не выполнено, перейти к п. 1.
4. Найти решение $\tilde{x} = (x, y, z) \geq \tilde{0}$ по формулам

$$x = A^{\sim 1} b,$$

$$y = A^{\sim 1} (g - Mx),$$

$$z = A^{\sim 1} (h - Nx).$$

Замечания

1. Если матрица $A-$ квадратная невырожденная, то в п. 3 проверять условия $A^{-1}(E + MA^{-1})b \geq A^{-1}h;$ $A^{-1}h \geq A^{-1}(MA^{-1})b;$ $A^{-1}g \geq A^{-1}NA^{-1}b$, а в п. 4 использовать формулы для определения нечеткого положительного решения $\tilde{x} = (x, y, z) > \tilde{0}$: $x = A^{-1}b, y = A^{-1}(g - Mx), z = A^{-1}(h - Nx)$.
2. Для нахождения решения можно применить более точную формулу (6) умножения нечетких чисел. Тогда неотрицательное нечеткое минимальное решение системы может быть найдено по формулам [3]:

$$x = A^{\sim 1} b,$$

$$y = (A - M)^{\sim 1} (g - Mx),$$

$$z = (A + N)^{\sim 1} (h - Nx).$$

при выполнении условий: $(A - M)^{\sim 1} \geq 0,$ $(A + N)^{\sim 1} \geq 0,$ $h \geq NA^{\sim 1}b,$ $g \geq MA^{\sim 1}b,$ $[A^{\sim 1} - (A - M)^{\sim 1} MA^{\sim 1}]b \geq (A - M)^{\sim 1} g$.

4. МОДЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

Пример 1. Решить полностью нечеткую систему линейных уравнений:

$$(0.4, 0.01, 0.02) \otimes \tilde{x}_1 \oplus (0.2, 0.017, 0.03) \otimes \tilde{x}_2 \oplus (0.6, 0.05, 0.02) \otimes \tilde{x}_3 = (2, 1, 2),$$

$$(0.5, 0.03, 0.03) \otimes \tilde{x}_1 \oplus (0.7, 0.02, 0.02) \otimes \tilde{x}_2 \oplus (0.2, 0.03, 0.04) \otimes \tilde{x}_3 = (3, 2, 1.5).$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.6 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.017 & 0.05 \\ 0.03 & 0.02 & 0.03 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 & 0.02 \\ 0.03 & 0.02 & 0.04 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

По формулам (9) получим решение: $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2.0071, 1.111, 1.250) \\ (2.5222, 1.823, 0.417) \\ (1.15453, 0.117, 2.129) \end{pmatrix}$ (рис. 1).

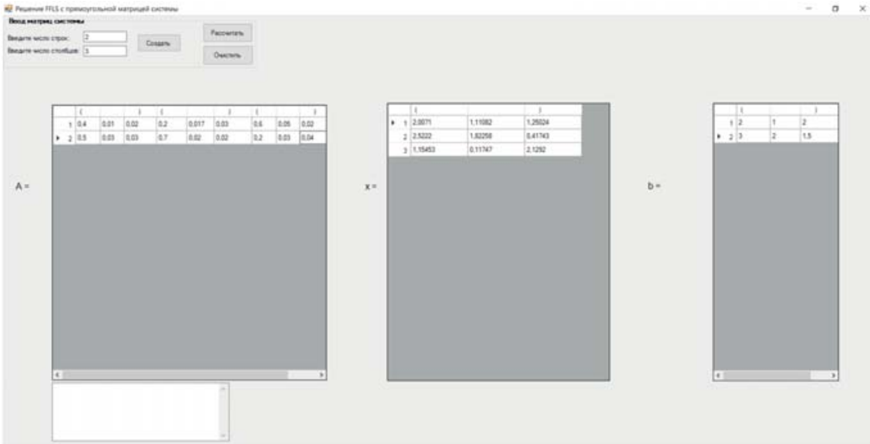

Рис. 1. Результаты решения примера 1

Пример 2. Решить полностью нечеткую систему линейных уравнений:

$$(1, 0.1, 0.5) \otimes \tilde{x}_1 = (4, 0.2, 1),$$

$$(2, 0.6, 0.3) \otimes \tilde{x}_1 = (3, 1.3, 0.6),$$

$$(3, 0.5, 2) \otimes \tilde{x}_1 = (5, 1, 4).$$

Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.6 \\ 0.5 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1.3 \\ 1 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.6 \\ 4 \end{pmatrix}.$

В [13] найдено решение по формулам (9):

$A^{\sim 1} = (0.0714, 0.1429, 0.2143)$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1) = ((1.7857, 0.0571, 0.1087))$ (рис. 2).

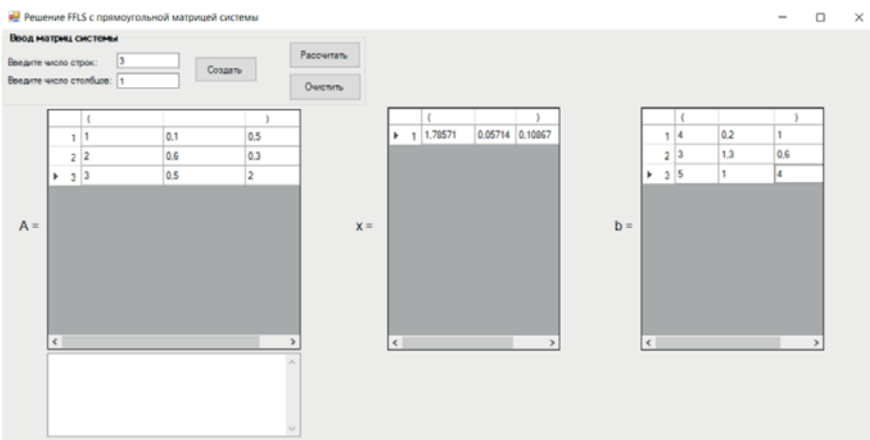

Рис. 2. Результаты решения примера 2

Пример 3. Решить полностью нечеткую систему линейных уравнений, заданную матрицами (задача о нахождении плана производства тканей [2]):

$$A=\begin{pmatrix}0.3 & 0.2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0.3 & 0.2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},M=\begin{pmatrix}0.01 & 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.02 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.02 & 0.03 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$N=\begin{pmatrix}0.02 & 0.03 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.05 & 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.04 & 0.06 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}72\\ 96\\ 120\end{pmatrix},\ g=\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 7\end{pmatrix},\ h=\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 6\end{pmatrix}.$$

По формулам (9) получим решение: $\tilde{x}=\begin{pmatrix}(32.64, 0.975, 0.573)\\ (40.93, 1.741, 0.707)\\ (36.517, 1.176, 0.695)\\ (54.022, 2.214, 0.806)\\ (82.168, 1.552, 1.654)\\ (100.418, 4.328, 1.821)\end{pmatrix}$ (рис. 3).

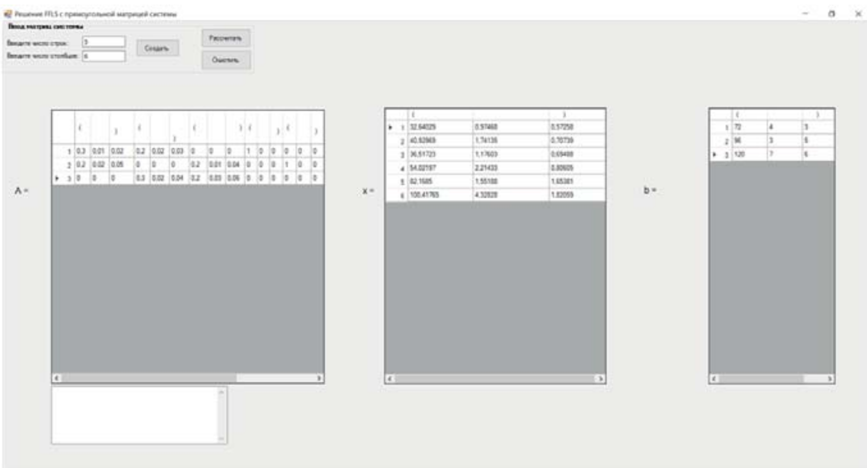

Рис. 3. Результаты решения примера 3

Пример 4. Решить полностью нечеткую систему линейных уравнений вида (7), заданную матрицами:

$$A=\begin{pmatrix}40 & 50 & 40\\ 30 & 20 & 10\\ 20 & 10 & 30\\ 40 & 20 & 80\\ 10 & 40 & 20\end{pmatrix},M=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},N=\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}200\\ 100\\ 80\\ 160\\ 120\end{pmatrix},\ g=\begin{pmatrix}30\\ 30\\ 25\\ 25\\ 35\end{pmatrix},\ h=\begin{pmatrix}20\\ 50\\ 30\\ 40\\ 60\end{pmatrix}.$$

По формулам (9) получим решение: $\tilde{x} = \begin{pmatrix} (1.614, 0.155, 0.279 \\ (2.225, 0.313, 0.330 \\ (0.657, 0.015, 0.158 \end{pmatrix}$ (рис. 4).

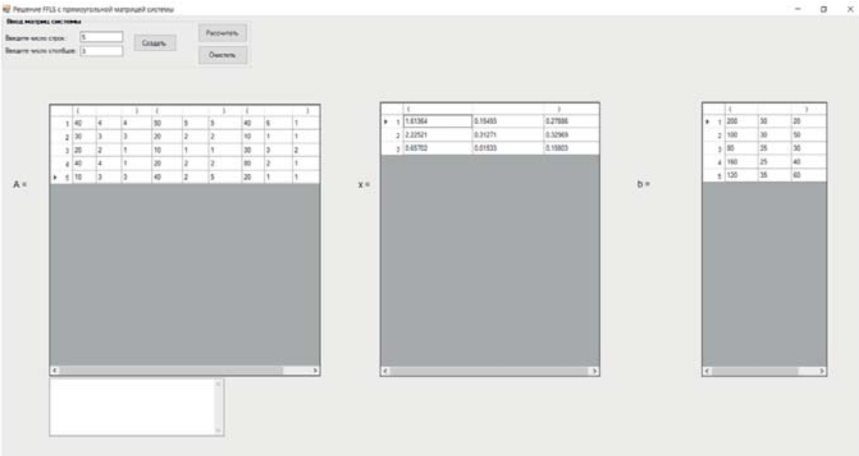

Рис. 4. Результаты решения примера 4

На рис. 1–4 отражены результаты, полученные с помощью разработанного программного обеспечения в среде VisualStudio на языке C#.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформирован алгоритм решения полностью нечеткой линейной системы с прямоугольной матрицей системы на основе понятия псевдорешения, а на его основе создано программное обеспечение. Его применение продемонстрировано на примерах решения полностью нечетких линейных систем с прямоугольными матрицами различных размеров и соотношений числа строк и столбцов, выполнено сравнение с известными результатами.

Литература

1. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Линейная алгебра в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2010.
2. *Пантелеев А.В.* Методы оптимизации. Практический курс / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Логос, 2011.
3. *Пантелеев А.В., Лунева С.Ю.* Численный метод решения полностью нечетких систем линейных уравнений // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=111433
4. *Пантелеев А.В., Савельева В.С.* Алгоритмическое и программное обеспечение исследования математической модели межотраслевого баланса при нечеткой информации о конечном спросе // Моделирование и анализ данных. 2019. № 3. С. 11–23.
5. *Пантелеев А.В., Савельева В.С.* Анализ модели выполнения производственного задания при нечеткой информации о коэффициентах прямых затрат и конечном спросе на про-

дукцию // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 09. № 4. С. 32–45. doi:10.17759/mda.2019090402
6. *Abbasbandy S.,Ezzati R., Jafarian A.* LU decomposition Method for Solving Fuzzy System of Linear Equations// Appl. Math. Comput. 2006. V. 172. P. 633–643.
7. *Abbasbandy S., Otadi M., Mosleh M.* Minimal Solutoin of a System of General Dual Fuzzy Linear Systems // Chaos Solutions and Fractals. 2008. V. 37. P. 1113–1124.
8. *Dehghan M., Hashemi B., Ghatee M.* Computational Methods for Solving Fully Fuzzy Linear Systems// Alied Mathematics and Computation. 2006. V. 179. P. 328–343.
9. *Dehghan M., Hashemi B., Ghatee M.* Solution of the Fully Fuzzy Linear Systems Using Iterative Techniques// Chaos Solutions and Fractals. 2007. V. 34. P. 316–336.
10. *Dubois D., Prade H.* Fuzzy sets and systems: theory and applications, Academic Press, New York, 1980.
11. *Malkawi G., Ahmad N., Ibrahim H.* Solving Fully Fuzzy Linear System with the Necessary and Sufficient Condition to have a Positive Solution //Appl. Math. Inf. Sci. 2014. V. 8, No. 3, P. 1003–1019.
12. *Matinfar M., Nasseri S.H., Sohrabi M.* Solving Fuzzy Linear System of Equations by using Housholder Decomposition Method // Applied Mathematical Sciences. 2008. V.51. P. 2569–2575.
13. *Mosleh M., Abbasbandy S., Otadi M.* A Method for Solving Fully Linear System// Mathematics Scientific Journal. 2011. V.7. № 2. P. 59–70.
14. *Nasseri S.H., Sohrabi M., Ardil E.* Solving Fully Fuzzy Linear Systems by Use of a Certain Decomposition of the Coefficient Matrix // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2008. V.19. P. 784–786.

Software for Solving Fully Fuzzy Linear Systems with Rectangular Matrix

Panteleev A.V.*
MAI (National Research University), Moscow, Russia
e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Saveleva V.S.**
MAI (National Research University), Moscow, Russia
e-mail: verassavel@mail.ru

The article discusses the problem of solving a fully fuzzy linear system of equations with a fuzzy rectangular matrix and a fuzzy right-hand side described by fuzzy triangular numbers in a form of deviations from the mean. A solution algorithm based on finding pseudo-solutions of systems of linear equations and corresponding software is formed. Various examples of created software application for arbitrary fuzzy linear systems are given.

Keywords: fuzzy numbers, fully fuzzy linear system of equations, triangular numbers, pseudo-inverse matrix, pseudo-solution.

References

1. Bortakovskii A.S., Panteleev A.V. Lineynaya algebra i analiticheskaya geometriya. Practicum [Linear algebra and analytic geometry. Practicum]. – Moscow: Publ. INFRA–M, 2015.
2. Panteleev A.V. Metody optimizatsii. Prakticheskii kurs [Optimization theory. Practical course]. Moscow: Publ. Logos, 2011.
3. Panteleev A.V., Luneva S.Yu. Chislennyi metod resheniya polnost'yu nechetkikh sistem lineinykh uravnenii [Numerical method of solving fully fuzzy system of linear equations] *Trudy MAI* [*Works of MAI*], 2019, no. 109. Available at URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=111433
4. Panteleev A.V., Saveleva V.S. Algoritmicheskoe i programmnoe obespechenie issledovaniya matematicheskoi modeli mezhotraslevogo balansa pri nechetkoi informatsii o konechnom sprose [Algorithmic and software research of a mathematical model of intersectoral balance with fuzzy information about final demand] *Modelirovanie i analiz dannikh* [*Modelling and Data Analysis*], 2019, no. 3, pp. 11–23.

For citation:
Panteleev A.V., Saveleva V.S. Software for Solving Fully Fuzzy Linear Systems with Rectangular Matrix. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2020. Vol. 10, no. 1, pp. 129–139. DOI: 10.17759/mda.2020100108 (In Russ., abstr. In Engl.)

Panteleev Andrei Vladimirovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute of Information Technologies and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

****Saveleva Vera Sergeevna,*** Undergraduate Student of the Institute of Information Technology and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, e-mail: verassavel@mail.ru

5. Panteleev A.V., Saveleva V.S. Analiz modeli vypolneniya proizvodstvennogo zadaniya pri nechetkoi informatsii o koeffitsientakh pryamykh zatrat i konechnom sprose na produktsiyu [Analysis of the Production Task Model With Fuzzy Information About Direct Cost Factors and the Final Product Demand] *Modelirovanie i analiz dannikh* [*Modelling and Data Analysis*], 2019. Vol. 09, no. 4, pp. 32–45. doi:10.17759/mda.2019090402.
6. Abbasbandy S.,Ezzati R., Jafarian A. LU decomposition Method for Solving Fuzzy System of Linear Equations. Appl. Math. Comput. 2006. V. 172. P. 633–643.
7. Abbasbandy S., Otadi M., Mosleh M. Minimal Solutoin of a System of General Dual Fuzzy Linear Systems. Chaos Solutions and Fractals. 2008. V. 37. P. 1113–1124.
8. Dehghan M., Hashemi B., Ghatee M. Computational Methods for Solving Fully Fuzzy Linear Systems. Alied Mathematics and Computation. 2006. V. 179. P. 328–343.
9. Dehghan M., Hashemi B., Ghatee M. Solution of the Fully Fuzzy Linear Systems Using Iterative Techniques. Chaos Solutions and Fractals. 2007. V. 34. P. 316–336.
10. Dubois D., Prade H. Fuzzy sets and systems: theory and applications, Academic Press, New York, 1980.
11. Malkawi G., Ahmad N., Ibrahim H. Solving Fully Fuzzy Linear System with the Necessary and Sufficient Condition to have a Positive Solution. Appl. Math. Inf. Sci. 2014. V. 8, No. 3, P. 1003–1019.
12. Matinfar M., Nasseri S.H., Sohrabi M. Solving Fuzzy Linear System of Equations by using Housholder Decomposition Method. Applied Mathematical Sciences. 2008. V.51. P. 2569–2575.
13. Mosleh M., Abbasbandy S., Otadi M. A Method for Solving Fully Linear System // Mathematics Scientific Journal. 2011. V.7. № 2. P. 59–70.
14. Nasseri S.H., Sohrabi M., Ardil E. Solving Fully Fuzzy Linear Systems by Use of a Certain Decomposition of the Coefficient Matrix. World Academy of Science, Engineering and Technology. 2008. V.19. P. 784–786.