АНАЛИЗ ДАННЫХ

УДК 004.942

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ФИНАНСОВОГО ИНДЕКСА RTSI

Е.А. Кускова, Ю.С. Кан

В статье рассматривается задача моделирование динамики российского финансового индекса RTSI, т.е. вычисление его математического ожидания с помощью трех различных моделей: выборочных моментов, AR-модели и ARCH-модели. Производится сравнительный анализ этих моделей с использованием трех различных критериев. Все расчеты производились на основе реальных данных – значений индекса RTSI за период 2008-2015 г.г.

The paper deals with the problem of modeling the dynamics of the Russian financial index RTSI, i.e. calculating its expectation using three different models: sampling moments, the AR-model and the ARCH-model. A comparative analysis of these models using three different criteria is presented. All calculations were made on the basis of real data about the values of the RTSI index for the time period 2008-2015 years.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Выборочные моменты, индекс RTSI, AR-модель, ARCH-модель.

ДЛЯ ЦИТАТЫ
Кускова Е.А., Кан Ю.С. Моделирование динамики финансового индекса RTSI // Моделирование и анализ данных. 2019. №2. С.39-47.
Kuskova E.A., Kan Yu.S. Modelling the dynamics of the RTSI index. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis *(Russia)*. 2019, no.2, pp.39-47

1. ВВЕДЕНИЕ

Фондовые рынки являются важным инструментом привлечения финансовых ресурсов в экономику страны.

Значение фондового рынка для экономики любой страны трудно переоценить. Во многих странах фондовый рынок рассматривают как национальное богатство, которое нужно охранять и поддерживать в нормальном состоянии. Именно на фондовом рынке встречаются продавцы и покупатели капитала. С одной стороны, фирмы и корпорации находят здесь инвестиции для целей своего развития, что в конечном итоге обеспечивает создание новых рабочих мест и выпуск продукции для личного и производительного потребления. Таким образом, экономика страны и благосостояние граждан во многом определяется развитием эффективно функционирующего фондового рынка. С другой стороны, лица имеющие свободные денежные средства, заинтересованы в эффективном их использовании. Если создан хорошо функционирующий фондовый рынок, на котором совершаются регулярные сделки с ценными бумагами, обеспечивающие извлечение инвестором прибыли, то он будет делать ещё новые инвестиции.

Развитость фондового рынка и его умелое регулирование со стороны государства во многом предопределяют мобильность экономики, её способность адаптироваться к новым условиям. Фондовый рынок является важнейшим механизмом, обеспечивающим эффективное функционирование всей экономики, является важнейшим показателям уровня зрелости экономического развития страны.

Вложение в ценные бумаги сегодня позволяет не только сохранить имеющийся капитал, защитив его от инфляции, но и значительно его увеличить. Это направление позволяет осуществлять успешные долгосрочные и краткосрочные инвестирования. Оно выступает в качестве источника стабильной прибыли для многих отечественных и иностранных игроков. Ценные бумаги набирают оборот и дают владельцам практически неограниченные возможности для разнообразных манипуляций для достижения основной цели - получения прибыли.

Одним из важнейших макроэкономических показателей состояния российского финансового рынка является биржевой индекс RTSI. В соответствии с классической моделью ценообразования CAPM (Capital Asset Pricing Model) [1,2], он является главным фактором, влияющим на поведение цен рисковых финансовых инструментов. При использовании CAPM принято считать, что значение индекса пропорционально цене индексного портфеля. В настоящее время проблема моделирования динамики биржевых индексов является не решенной. В настоящей статье делается попытка провести сравнительный анализ некоторых популярных моделей [3,4] для прогнозирования российского индекса RTSI на основе статистических данных о его поведении в прошлом.

2. МЕТОД ВЫБОРОЧНЫХ МОМЕНТОВ

Для оценки математического ожидания использовалась стандартная формула выборочного момента, в которой используются прошлые значения цен биржевого индекса.

$$\widehat{M}[S_T] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i. \tag{1}$$

На рис. 1 можно увидеть динамику индекса RTSI, посчитанную данным способом. В каждый момент времени осреднение (1) выполнялось по статистическим данным, включающим дневные цены закрытия для индекса RTSI за предшествующие два месяца. На всех рисунках квадратиками обозначены реальные значения индекса RTSI на конец каждого двухмесячного периода.

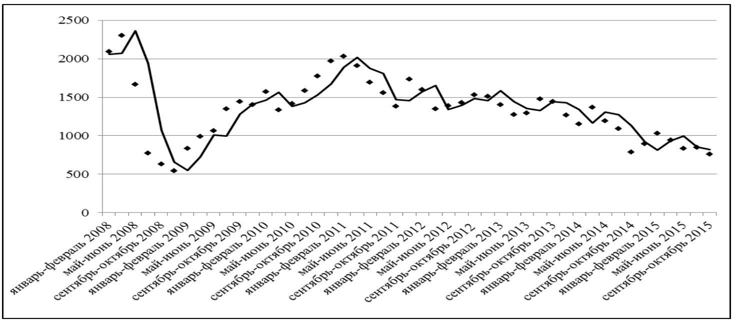

Рис. 1. Динамика оценки индекса RTSI с использованием формулы выборочного момента

3. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦЕН

В соответствии с современными представлениями [4], цена S_n рискового финансового инструмента, в частности индексного портфеля, представляется в виде

$$S_n = S_0 e^{H_n} \tag{2}$$

где $H_n = h_1 + \dots + h_n, h_0 = 0, n \geq 0$.

Таким образом

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}} = \ln\left(1 + \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}\right).$$

В [4] предложено строить модели динамики именно для случайных величин h_n.

4. AR-МОДЕЛЬ

Говорят, что последовательность $h = (h_n)_{n\geq 1}$ подчиняется авторегрессионной модели $AR(p)$ порядка p если:

$$h_n = \mu_n + \sigma\varepsilon_n,$$

где $\mu_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \dots + a_p h_{n-p}$, ε_n - стандартная гауссовская последовательность (дискретный белый шум).

Рассмотрим частный случай $p = 1$:

$$h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \sigma\varepsilon_n.$$

Рекуррентным образом находим, что

$$h_n = a_0(1 + a_1 + \dots + a_1^{n-1}) + a_n h_0 + \sigma(\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1} + \dots + a_1^{n-1}\varepsilon_{n-1}). \tag{3}$$

Свойства последовательности $h = (h_n)_{n\geq 1}$ существенным образом зависят от параметра a_1.

Из (3) находим, что

$$M[h_n] = a_1^n M[h_0] + a_0(1 + a_1 + \dots + a_1^{n-1}) \tag{4}$$

для $n - k \geq 1$

Из (4) видно, что в случае $|a_1| < 1$ и $M[h_0] < \infty$ при $n \to \infty$

$$M[h_n] = a_1^n M[h_0] + \frac{a_0(1 - a_1^n)}{1 - a_1} \to \frac{a_0}{1 - a_1}.$$

Если начальное распределение для h_0 является гауссовским $h_0 \sim N\left(\frac{a_0}{1-a_1}, \frac{\sigma^2}{1-a_1^2}\right)$, то $h = (h_n)_{n\geq 1}$ образует гауссовскую последовательность со следующими числовыми характеристиками:

$$M[h_n] = \frac{a_0}{1-a_1}, \tag{5}$$

$$D[h_n] = \frac{\sigma^2}{1-a_1^2}. \tag{6}$$

Теперь рассмотрим вопросы, связанные с оценкой параметров $\theta = (a_0, a_1, \dots, a_p, \sigma)$ авторегрессионной модели $AR(p)$. Если предполагать, что белый шум в широком смысле является гауссовским, то основным методом оценивания является метод максимального правдоподобия, согласно которому в качестве оценки параметров берется значение

$$\widehat{\theta_n} = \arg\max_{\theta} p_\theta(h_1, h_2, \dots, h_n),$$

где $p_\theta(h_1, h_2, \dots, h_n)$ - совместная плотность вектора $(h_1, h_2, \dots, h_n)$

Для $AR(1)$ модели $\theta = (a_0, a_1)$ будем считать $\sigma > 0$ известным параметром $h_0 = 0, n \geq 1$ поэтому

$$p_\theta(h_1, h_2, \dots, h_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(h_k - a_0 - a_1 h_{k-1})^2}{\sigma^2}\right\}.$$

Оценка $\hat{\theta} = (\widehat{a_0}, \widehat{a_1})$ определяется из условия обращения в минимум функции

$$\Psi(a_0, a_1) = \sum_{k=1}^{n}(h_k - a_0 - a_1 h_{k-1}).$$

Видно, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial a_0} = 2\sum\limits_{k=1}^{n}(h_k - a_0 - a_1 h_{k-1}) = 0 \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial a_1} = 2\sum\limits_{k=1}^{n}(h_k - a_0 - a_1 h_{k-1})h_{k-1} = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему линейных уравнений, находим оценки $\widehat{a_0}$ и $\widehat{a_1}$.

Вычислим математическое ожидание индекса с учетом вероятностного представления цен (2):

$$M[e^{H_n}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x f_{H_n}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2-2\sigma^2 x}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(m+\sigma^2)^2}{2}} dx = e^{\frac{m+\sigma^2}{2}}.$$

Следовательно,

$$M[e^{H_n}] = e^{\frac{m+\sigma^2}{2}}.$$

Пользуясь свойством математического ожидания, получим

$$M[S_n] = S_0 e^{\frac{m+\sigma^2}{2}}, \tag{7}$$

где m, σ – моментные характеристики случайной величины H_n, которые с учетом (5),(6) можно вычислить следующим образом:

$$m = M[H_n] = \frac{na_0}{1-a_1}, \tag{8}$$

$$\sigma^2 = D[H_n] = \frac{\hat{\sigma}^2 n}{1-a_1^2}(1 + \sum_{k=1}^{n} a_1^k), \tag{9}$$

где

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n}(h_k - a_0 - a_1 h_{k-1})^2.$$

На рис. 2 можно увидеть динамику индекса RTSI, построенную с помощью $AR(1)$ модели.

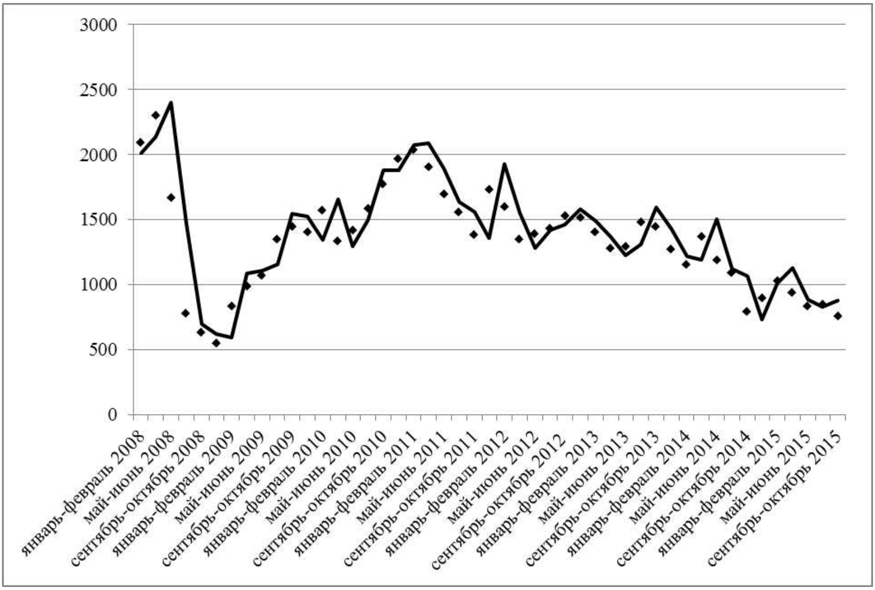

Рис. 2. Динамика оценки индекса RTSI, построенная с помощью AR-модели

5. ARCH-МОДЕЛЬ

Рассмотрим модель

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \qquad (10)$$

где σ_n определяется следующим образом

$$\sigma_n^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i h_{n-1}^2.$$

Для $p = 1$

$$\sigma_n^2 = a_0 + a_1 h_{n-1}.$$

Для последовательности $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ можно выделить следующие свойства:

$$M[h_n] = 0,$$

$$M[h_n^2] = D[h_n] = a_0 + M[a_1 h_{n-1}^2].$$

В предположении, что $0 < a_1 < 1$, получаем

$$M[h_n^2] = \frac{a_0}{1 - a_1}.$$

Для оценки параметров a_0 и a_{01} используется метод моментов, который заключается в решение следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{a_0}{1-a_1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k^2}{n-1} \\ \frac{3a_0^2(1+a_1)}{(1-a_1)(1-3a_1^2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k^4}{n-1}. \end{cases}$$

Для вычисления математического ожидания значений индекса RTSI с учетом вероятностного перерасчета цен используется метод Монте-Карло, суть которого заключается в моделировании реализаций последовательности (10) при помощи генерации случайной величины ε_n. Это повторяется много раз и на основе полученных случайных данных оценивается требуемое математическое ожидание.

Для этого сначала генерируется последовательность случайных величин $\varepsilon \sim N(0,1)$. Далее генерируем последовательность $h_n = \sigma_n \epsilon_n$, причем $h_0 = 0$.

Затем генерируется последовательность величин $S_n = S_{n-1} e^{h_n}$ с учетом (2) , а её математическое ожидание высчитывается с помощью стандартной формулы выборочного момента (1).

На рис. 3 можно увидеть динамику индекса RTSI, вычисленную с помощью метода построения ARCH модели.

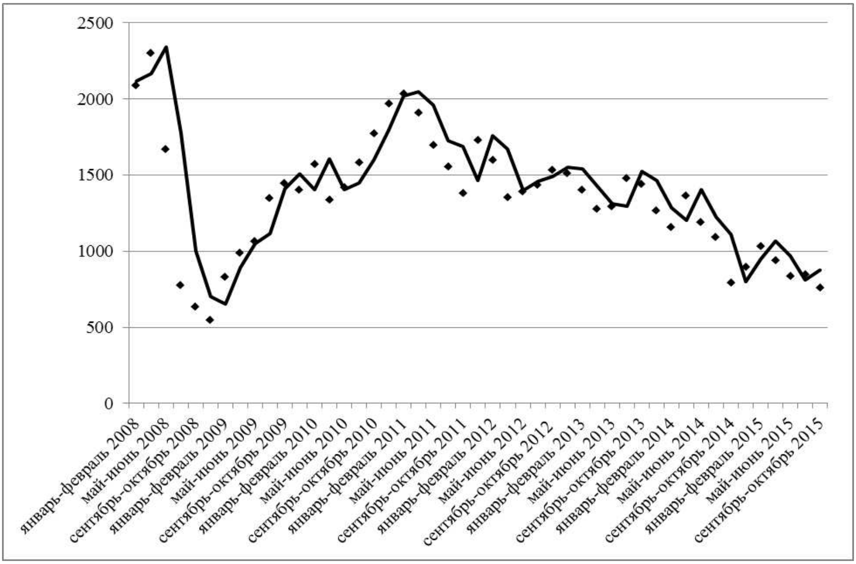

Рис. 3. Динамика оценки индекса RTSI, построенная с помощью ARCH-модели

6. СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ

Для сравнения результата используются 3 критерия. В табл. можно увидеть разницу между данными критериями.

В качестве первого критерия используется квадрат отклонения от среднего значения, посчитанного в соответствии с выбранной моделью.

$$I_1 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(S_k - M[S_k])^2}.$$

В качестве второго критерия используется модуль отклонения от среднего значения.

$$I_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|S_k - M[S_k]|$$

В качестве третьего критерия оценки качества модели используется полудлина интервала, в который с вероятность 0,9 попадают отклонения реальных значений индекса RTSI от его прогнозных значений.

Для этого сначала вычислим значения ошибок для каждой модели.

$$e_k = x_k^{\text{реальное}} - x_k^{\text{модельное}}$$

где $x_k^{\text{точное}}$ – известное значение индекса RTSI, $x_k^{\text{модельное}}$ – прогнозное значение, рассчитанное для каждой из моделей с использованием описанных выше формул по данным за исторический двухмесячный период.

Для метода выборочного момента $x_k^{\text{модельное}}$ рассчитывается по формуле (1).

Для модели AR(1) $x_k^{\text{модельное}}$ вычисляется с использованием формул (7) – (9).

Для ARCH(1) модели $x_k^{\text{модельное}}$ вычисляется, как описано выше, при помощи генерации последовательности $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ методом Монте-Карло.

Составляем вариационный ряд:

$$|e_{(1)}| \le \cdots \le |e_{(n)}|$$

Следовательно, значение третьего критерия будет равно

$$I_3 = |e_{(n_{0.9})}|$$

где $n_{0.9} = [0{,}9n] + 1$.

Таблица 1 Сравнение критериев моделирования динамики индекса RTSI

	I_1	I_2	I_3
Выборочный момент	271,5094	188,6639	342,2
AR(1)-модель	218,6188	164,1294	325,8
ARCH(1)-модель	244,005	174,943	318,8

В табл. приведем примеры рассчитанных критерий на основе данных индекса RTSI за январь 2008 -октябрь 2015.

7. ВЫВОДЫ

Результаты расчетов свидетельствуют о том, что модели AR(1) и ARCH(1) примерно одинаковы по точности и превосходят первую модель, основанную на выборочном среднем. В то же время указанные в табл. значения критериев сравнения с учетом того, что среднее значение индекса RTSI за рассматриваемый период составляет примерно 1500 пунктов, свидетельствуют о том, что рассмотренные динамические модели AR(1) и ARCH(1) имеют погрешность выше 10% при прогнозировании всего на один день вперед. Это видимо свидетельствует о том, что удовлетворительное прогнозирование финансового индекса RTSI невозможно с использованием только статистических данных о его динамике в прошлом и требует учета дополнительной информации о других макроэкономических показателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sharpe W.F.* Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk // J. of Finance, 1964, 19, p. 425-442.
2. *Lintner J.* The valuation of risky assets and the selection of risky investments on stock portfolios and capital budgets // Review of Economics and Statistics, 1965, 47, p. 13-34.
3. Кан Ю.С. Оптимизация портфеля ценных бумаг с учетом риска. - М.: МАИ-ПРИНТ, 2008.
4. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели. - М.: ФАЗИС, 1998.

Работа поступила 20.02.2019г.